2007 г. **№12**

Труды ФОРА

ИССЛЕДОВАНИЕ БЕСКОНЕЧНО УДАЛЕННЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК КУБИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ В ОДНОМ СЛУЧАЕ

Д.С. Ушхо, А.Д. Ушхо

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

Работа является продолжением исследования, проведенного в заметке [4]. Доказано, что сумма индексов Пуанкаре кубической дифференциальной системы, расположенных на экваторе сферы Пуанкаре, удовлетворяет неравенству $-2 \leqslant \sum J \leqslant 4$. Установлено также, что индекс J отдельно взятой особой точки системы на экваторе сферы Пуанкаре удовлетворяет неравенству $|J| \leqslant 3$. Справедливо утверждение: если кубическая система имеет на бесконечности точку равновесия с индексом $J = \pm 3$, то эта система, кроме указанной точки равновесия, непременно имеет еще одну бесконечно удаленную, притом простую точку покоя. Полностью изучено поведение траектории кубической системы на бесконечности в случае, когда число ее точек покоя там равно трем, и индекс одной из них равен $J = \pm 2$.

This article is continuation of investigation [4]. The author prove theorem about that the sum of Pouncare indexes of cubic differential system located on the equator of Pouncare sphere

Изучению поведения траектории дифференциальной системы:

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=0}^{3} a_{ij}x^i y^j \equiv P(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^{3} b_{ij}x^i y^j \equiv Q(x,y) \tag{1}$$

на экваторе сферы Пуанкаре посвящены работы [1-5].

Во всех указанных работах предполагаются выполненными условия:

$$a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}, \ \ (P,Q) = 1, \ \ \sum_{i+j=3} |a_{ij}| > 0, \ \ \sum_{i+j=3} |b_{ij}| > 0 \tag{2}$$

Впервые попытка исчерпывающего исследования системы (1) на бесконечности была предпринята в работе [1]. Однако, результаты, полученные автором заметки [1], оказались далеко неполными (см. [2-5]).

В заметках [2,3] изучаются бесконечно удаленные точки покоя системы (1) при условии, что начало координат (0;0) - центр. Некоторые результаты, полученные в этих работах, уже свидетельствуют о неполноте исследования, проведенного в статье [1]. Об этом свидетельствуют также результаты работ [4,5].

Следуя [6], применим к системе (1) преобразование Пуанкаре:

$$x = \frac{1}{z}, \ \ y = \frac{u}{z}:$$

$$\begin{aligned} \tfrac{du}{dt} = b_{30} + (b_{21} - a_{30})u + b_{20}z + (b_{12} - a_{21})u^2 + (b_{11} - a_{20})uz + b_{10}z^2 + \\ +(b_{03} - a_{12})u^3 + (b_{02} - a_{11})u^2 z + (b_{01} - a_{10})uz^2 + b_{00}z^3 - a_{03}u^4 - \\ -a_{02}u^3 z - a_{01}u^2 z^2 - a_{00}uz^3 \equiv \overline{P}(u,z), \end{aligned} \tag{3}$$

$$\frac{dz}{dt} = -a_{30}z - a_{21}uz - a_{20}z^2 - a_{12}u^2 z - a_{11}uz^2 - a_{10}z^3 - a_{03}u^3 z - a_{02}u^2 z^2 - a_{01}uz^3 - a_{00}z^4 \equiv \overline{Q}(u,z).$$

Все особые точки системы (1) на бесконечности, за исключением "концов оси y", определяются из системы

$$z = 0;\ \ f(u) \equiv b_{30} + (b_{21} - a_{30})u + (b_{12} - a_{21})u^2 + (b_{03} - a_{12})u^3 - a_{03}u^4 = 0$$

Преобразование Пуанкаре $x = \frac{v}{z};\ \ y = \frac{1}{z}$ [6] применяем к системе (1) лишь для установления характера особой точки (0,0) системы:

$$\begin{gathered}\tfrac{dv}{dt} = a_{03} + (a_{12} - b_{03})v + a_{02}z + (a_{21} - b_{12})v^2 + (a_{11} - b_{02})vz + a_{01}z^2 + (a_{30} - b_{21})v^3 + \\ +(a_{20} - b_{11})v^2 z + (a_{10} - b_{01})vz^2 + a_{00}z^3 - b_{30}v^4 - b_{20}v^3 z - b_{10}v^2 z^2 - b_{00}vz^3 \equiv \widetilde{P}(v, z),\end{gathered} \tag{4}$$

$$\frac{dz}{dt} = -b_{03}z - b_{12}vz - b_{02})z^2 - b_{21}v^2 z - b_{11}vz^2 - b_{01}z^3 - b_{30}v^3 z - b_{20})v^2 z^2 - b_{10}vz^3 - b_{00}z^4 \equiv \widetilde{Q}(v, z)$$

Нами изучаются все бесконечно удаленные особые точки системы (1) при условии, что экватор сферы Пуанкаре состоит из траекторий, т. е. $\overline{Q}(u, 0) \equiv 0$ и $f(u) \not\equiv 0$, и, разумеется, $(\overline{P}, \overline{Q}) = 1$.

Ранее в статье [4] изучены бесконечно удаленные особые точки системы (1) в случае, когда для исследуемой особой точки $(u_0; 0)$ системы (3) и точки (0;0) системы (4) выполняются условия:

$$|\overline{P}'_u(u_0; 0)| + |\overline{P}'_z(u_0; 0)| + |\overline{Q}'_u(u_0; 0)| + |\overline{Q}'_z(u_0; 0)| > 0 \tag{5}$$

$$|\widetilde{P}'_v(0; 0)| + |\widetilde{P}'_z(0; 0)| + |\widetilde{Q}'_u(0; 0)| + |\widetilde{Q}'_z(0; 0)| > 0 \tag{6}$$

Теперь ставится задача: исследовать поведение траекторий системы (1) на экваторе сферы Пуанкаре в случае, когда хотя бы для одной особой точки системы (3) не выполнено условие (5).

Теорема 1. Индекс J Пуанкаре особой точки системы (1) на экваторе сферы Пуанкаре (БЧП) удовлетворяет неравенству $|J| \leqslant 3$.

Доказательство. Предположим, что индекс Пуанкаре некоторой точки равновесия системы (1) в БЧП удовлетворяет условию $|J|$ 3. Не уменьшая общности рассуждений, считаем, что этой особой точкой является состояние равновесия $A(u = z = 0)$ системы (3). Тогда согласно [6] в правых частях системы (3) отсутствуют все члены до третьего измерения включительно, т. е. выполняются условия

$$a_{30} = a_{21} = a_{12} = a_{20} = a_{11} = a_{10} = b_{30} = b_{21} = b_{12} = b_{03} = b_{20} = b_{11} = b_{02} = b_{10} = b_{01} = b_{00} = 0 \tag{7}$$

Из (7) следует, что в правой части второго уравнения системы (1) отсутствуют кубические члены, а это противоречит последнему неравенству (2). Теорема доказана.

Пусть нам предложена система

$$\frac{dx}{dt} = P_n(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q_n(x, y) \tag{8}$$

с взаимно простыми многочленами n-ой степени P_n и Q_n над полем $\mathbb{R}$.

Будем говорить, что гладкая кривая

$$F(x, y) = 0 \tag{9}$$

имеет контакт в точке $K(x, y)$ с траекторией системы (8), если имеет место равенство:

$$\frac{Q_n(x, y)}{P_n(x, y)} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \qquad (10).$$

При этом точку $K(x, y)$ будем называть просто контактом на кривой (9).

Лемма 1. Пусть уравнение (9) задает алгебраическую кривую k-ого порядка $(k \geqslant 1)$, а $n \geqslant 2$. Тогда сумма числа контактов и состояний равновесия системы (8) на кривой (9), не являющейся инвариантной для системы (8), не превосходит числа $K(k + n - 1)$.

В самом деле, из (10) получаем уравнение

$$F'_x(x,y)P_n(x,y)+F'_y(x,y)Q_n(x,y)=0 \tag{11}$$

Так как кривая (9) не является инвариантной для системы (8), то уравнение (11) является алгебраическим $k+n-1$-ой степени. Поэтому кривая (9) имеет с кривой (11) не более $K(k+n-1)$ общих точек, в числе которых, вообще говоря, могут быть также и особые точки системы (8).

Следствие 1. Сумма числа контактов и состояний равновесия системы (1) на прямой, не являющейся инвариантной для этой системы, не превосходит трех.

Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=P_m(x,y)+P_r(x,y), \quad \frac{dy}{dt}=Q_m(x,y)+Q_s(x,y) \tag{12}$$

правые части которой взаимно простые многочлены над полем $\mathbb{R}$, причем $s,r>m, m\geqslant 1, P_m, Q_m$ - однородные многочлены степени $m, |P_m|+|Q_m|\not\equiv 0$.

Согласно [7, с. 66] любая прямая $y=kx$, проходящая через точку (0,0) кривой

$$Q_m(x,y)-kP_m(x,y)+Q_s(x,y)-kP_r(x,y)=0 \tag{α}$$

имеет с этой кривой в точке (0,0) m-кратное пересечение. Исключение составляют лишь те прямые (их число не более m), которые являются компонентами кривой

$$Q_m(x,y)-kP_m(x,y)=0 \tag{β}.$$

Впрочем, эти прямые являются касательными к кривой (α) в точке (0;0) и могут иметь в точке (0,0) более чем m-кратное пересечение с кривой (α).

Итак, справедлива

Теорема 2. Сумма числа контактов, расположенных в достаточно малой проколотой окружности точки покоя (0,0) системы (12) и лежащих на любой прямой L, не являющейся инвариантной для этой системы и не параллельной ни одной из прямых - компонент кривой (β), не превосходит m.

Здесь угловой коэффициент прямой L равен k.

Лемма 2. Число гиперболических секторов h, примыкающих к точке покоя (0,0) системы (12), удовлетворяет условию $h\leqslant 2m+2$.

В самом деле, число N контактов окружности $x^2+y^2=\epsilon^2$, где $\epsilon>0$ - сколь угодно малое число, с траекториями системы (12) удовлетворяет неравенству $N\geqslant h$, так как указанная окружность имеет хотя бы один контакт в каждом гиперболическом секторе. Согласно лемме 1 $2(m+1)\geqslant N$. Отсюда видно, что действительно верна оценка $h\leqslant 2m+2$.

Заметим, что индекс Пуанкаре $J(0,0)$ особой точки (0,0) системы (12) при выполнении условия $|P_m|+|Q_m|\not\equiv 0$ удовлетворяет неравенству $|J(0;0)|\leqslant m$.

Теорема 3. Если индекс Пуанкаре $J(O)$ особой точки $O(0,0)$ системы (12) равен $m(-m)$, где $m>1$, то к этой точке примыкают ровно $2m-2$ эллиптических секторов и не примыкает ни один гиперболический сектор (примыкают ровно $2m+2$ гиперболических секторов и не примыкает ни один эллиптический сектор).

Доказательство. Пусть $J(O)=m$, тогда согласно формуле Бендиксона [6]

$$J=1+\frac{e-h}{2} \tag{13},$$

где $e(h)$ - число эллиптических (гиперболических) секторов, примыкающих к точке O, имеем равенство $e=2m-2+h$, т. е.

$$e\geqslant 2m-2eqno(14).$$

С другой стороны в силу известной работы [8] имеет место оценка числа эллиптических секторов

$$e\leqslant 2m-2 \tag{15}.$$

Из (14) и (15) следует, что $e=2m-2$, а вместе с тем и $h=0$.

Пусть далее $J(O) = -m$. Принимая во внимание формулу (13), получаем равенство $h = 2m + 2 + e$, то есть

$$h \geqslant 2m + 2 \qquad (16).$$

Из леммы 2, (13) и (16) следует, что $h = 2m + 2, e = 0$. Теорема доказана.

Пусть

$$L : y = kx + b \qquad (17)$$

прямая на фазовой плоскости системы (8). Применим к этой системе преобразование $x = \frac{1}{z}, y = \frac{u}{z}$. Тогда дифференциальное уравнение траекторий системы (8) перейдет в уравнение

$$\frac{dz}{du} = \frac{-zP_n(\frac{1}{z}, \frac{u}{z})}{Q_n(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}) - uP_n(\frac{1}{z}, \frac{u}{z})}, \qquad (18)$$

а прямая L – в прямую

$$\overline{L} : z = \frac{u}{b} - \frac{k}{b} \qquad (19),$$

$b \neq 0$.

Имеет место

Лемма 3. Траектория системы (8) касается прямой (17) в неособой точке $N(x_0, y_0)$ тогда и только тогда, когда интегральная кривая уравнения (18) касается прямой (19) в соответствующей точке $\overline{N}(u_0, z_0) \quad (x_0 \cdot z_0 \neq 0)$.

Теорема 4. Пусть система (1) имеет в БЧП сложную точку покоя $A(u = z = 0)$, при этом $J(A) = -2$ и выполняется условие:

$$|\overline{P_2}(u, z)| + |\overline{Q_2}(u, z)| \not\equiv 0, \qquad (20)$$

где $\overline{P_2}, \overline{Q_2}$ - однородные многочлены второй степени. Тогда сумма индексов всех остальных состояний равновесия системы (1) в БЧП не меньше нуля.

Доказательство. Очевидно, в условиях данной теоремы выполняются следующие ограничения на коэффициенты системы (3): $a_{30} = b_{30} = b_{21} = b_{20} = 0$ (21), а уравнение $f(u) = 0$ для определения координаты u_i особой точки системы (3) запишется в виде:

$$(b_{12} - a_{21} + (b_{03} - a_{12})u - a_{03}u^2)u^2 = 0 \qquad (22)$$

Из (22) видно, что система (1) может иметь в БЧП не более трех состояний равновесия.

Рассмотрим два случая: 1) система (1) имеет в БЧП только два состояния равновесия; 2) система (1) имеет в БЧП три состояния равновесия. В случае 1) полагаем, что вторая бесконечно удаленная точка покоя системы (1) есть $B(u = 1, z = 0)$.

Тогда выполняются условия:

$$b_{03} - a_{12} = 2a_{03}, \quad b_{12} - a_{21} = -a_{03}, \quad a_{03} = 0 \qquad (23)$$

Перенесем начало координат в точку B с учетом (21) и (23):

$$\begin{gathered}\frac{du}{dt} = (b_{11} + b_{02} - a_{20} - a_{11} - a_{02})z - a_{03}u^2 + (b_{11} - a_{20} + 2b_{02} - 2a_{11} - 3a_{02})uz + \\ +(b_{10} + b_{01} - a_{10} - a_{01})z^2 - 2a_{03}u^3 + (b_{02} - a_{11} - 3a_{02})u^2z + (b_{01} - a_{10} - 2a_{01})uz^2 + \\ +(b_{00} - a_{00})z^3 - a_{03}u^4 - a_{02}u^3z - a_{01}u^2z^2 - a_{00}uz^3,\end{gathered} \qquad (24)$$

$$\begin{gathered}\frac{du}{dt} = (-a_{21} - a_{12} - a_{03})z + (-a_{21} - 2a_{12} - 3a_{03})uz + (-a_{20} - a_{11} - a_{02})z^2 + \\ +(-a_{12} - 3a_{03})u^2z + (-a_{11} - 2a_{02})uz^2 + (-a_{10} - a_{01})z^3 - a_{03}u^3z - \\ -a_{02}u^2z^2 - a_{01}uz^3 - a_{00}z^4.\end{gathered}$$

Очевидно, (0,0)- сложная точка покоя системы (24). Так как по условию $J(A) = -2$, и при этом выполняется неравенство (20), то согласно теореме 3 А-шестисепаратрисное седло. Как видно из системы (3), при переходе через точку А вдоль прямой $z = 0$ производная $\frac{du}{dt}$ сохраняет свой знак. Поэтому относительно расположения гиперболических секторов, примыкающих к точке А, возможны два предположения:

а) в одной из полуплоскостей $z > 0$ и $z < 0$ расположены пять гиперболических секторов, а в другой - один гиперболический сектор;

б) в каждой из двух указанных полуплоскостей расположены три гиперболических сектора.

Предполагаемая возможность а) не реализуется. Действительно, считая ради определенности пять гиперболических секторов, примыкающих к точке А, расположенными в полуплоскости $z > 0$, можно утверждать, что существует прямая $z = \alpha \cdot u + \beta$ (25), где $\alpha < 0$, $\beta > 0$ - близкие к нулю числа, такие, что $-1 < \frac{\beta}{\alpha} < 0$, имеющая, по крайней мере, четыре контакта с траекториями системы (3). Соответствующая прямая на фазовой плоскости (x, y) также имеет не менее четырех контактов с траекториями системы (1) (см. лемму 3). Пришли к противоречию со следствием 1.

Итак, в каждой полуплоскости $z > 0$ и $z < 0$ расположены три гиперболических сектора, примыкающих к точке А. Предположим, что $J(B) = -1$ (в дальнейшем символ J(-) означает индекс Пуанкаре особой точки, где - заменяет букву, обозначающую ту или иную особую точку).

Так как производная $\frac{du}{dt}$ сохраняет свой знак при переходе через точку В вдоль прямой $z = 0$ (см. первое уравнение системы (24)), то либо выше прямой $z = 0$, либо ниже нее расположены не менее трех гиперболических секторов. Пусть ради определенности три гиперболических сектора, примыкающих к точке В, расположены в полуплоскости $z > 0$. Тогда найдется прямая (25), где $\alpha < 0$, $\beta > 0$ - близкие к нулю числа, причем $\frac{\beta}{\alpha} < -1$, которая имеет не менее четырех контактов с траекториями системы (1), что противоречит следствию 1.

Теорема доказана в случае двух особых точек. Пусть далее система (1) имеет три состояния равновесия на экваторе сферы Пуанкаре. Не уменьшая общности рассуждений, полагаем, что $A(u = 1, z = 0)$, $D(u = z = 0)$ - исследуемые состояния равновесия. Тогда выполняются условия: $a_{03} = 0$, $b_{12} - a_{21} = a_{12} - b_{03} \neq 0$. Нетрудно видеть, что один из корней характеристического уравнения особой точки В равен $\lambda_2 = b_{03} - a_{12}$, а для точки D один из характеристических корней равен $-\lambda_2$ (см. [4, с.42]). Допустим, что В и D - простые седла, и рассмотрим пряую $x = b$ (26). Если b - настолько большое положительное число, что правее этой прямой системы (1) не имеет в конечной части фазовой плоскости (КЧП) состояний равновесия, то (26) имеет не менее четырех контактов с траекториями системы (1). А это противоречит следствию 1.

Заметим, что В и D, являясь сложными состояниями равновесия, каждая может быть либо топологическим седлом, либо топологическим узлом, либо седло узлом [6] (эти точки имеют по одному, отличному от нуля характеристическому корню).

Рассуждениями, аналогичными выше проведенным, можно показать, что не может иметь местф случай, когда одна из точек В и D является седлоузлом, а другая - седлом. Впрочем, рассуждения, проведенные выше в случае двух простых седел В и D, остаются в силе и подавно, если хотя бы одна из этих двух особых точек является слоисным седлом. Теорема доказана.

Теорема 5. Если система (1) имеет в БЧП сложную точку покоя, индекс Пуанкаре которой равен - 3, то непременно эта система имеет в КЧП три простых узла, расположенных по одному на трех инвариантных прямых, и один простой узел в БЧП.

Доказательство. Предположим, что $J(A) = -3$. Тогда в правых частях системы (3) отсутствуют все члены до второго измерения включительно, но при этом имеется хотя бы один кубический член в правой части каждого уравнения этой системы. Поэтому согласно теореме 3 точка $A(u = z = 0)$ является восьмисекаратрисным седлом.

Итак, в условиях данной теоремы система (1) имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3, \quad (27)$$

$$\frac{dy}{dt} = b_{00} + b_{01}y + b_{02}y^2 + b_{03}y^3$$

Уравнение $f(u) = 0$ для системы (27) запишется в виде:

$$(b_{03} - a_{12} - a_{03}u)u^3 = 0 \qquad (28).$$

Из (28) видно, что $|b_{03} - a_{12}| + |a_{03}| > 0$, так как в противном случае $f(u) \equiv 0$.

Если $a_{03} = 0$, то $b_{03} - a_{12} \neq 0$, более того, $b_{03} \cdot a_{12} \neq 0$ (в противном случае в правой части хотя бы одного из уравнений системы (27) отсутствуют кубические члены).

Тогда $D(v = z = 0)$ - простая особая точка системы (4). Из вида правых частей системы (27) следует, что она может иметь не более трех состояний равновесия, каждое из которых расположено на инвариантной прямой. Так как $b_{03} \neq 0$, то уравнение

$$b_{00} + b_{01}y + b_{02}y^2 + b_{03}y^3 = 0 \qquad (\gamma)$$

имеет хотя бы один действительный корень. Возможны случаи: 1) одного трехкратного корня; 2) одного простого и одного двукратного корня; 3) одного простого действительного и двух комплексно - сопряженных корней; 4) трех различных действительных корней уравнения (γ). В силу того, что правая часть первого уравнения системы (27) является линейной функцией переменной x, то на каждой инвариантной прямой $y = y_i$, где y_i - корень уравнения (γ), расположено не более одного состояния равновесия системы (27). При этом простому корню уравнения (γ) соответствует простая точка покоя типа седла или узла, а двукратному (трехмерному) корню - точка покоя с индексом Пуанкаре, равным 0 (1 или -1). Согласно формуле

$$J = \frac{P - q}{2} \qquad (6).$$

Поэтому ни в одном из случаев 1)-3) сумма индексов Пуанкаре всех состояний равновесия системы (27) как в КЧП, так и в БЧП не равна 1. Следовательно, в КЧП эта система имеет три простых узла и один простой узел $D(v = z = 0)$ в БЧП.

Можно показать, что в условиях данной теоремы невозможен случай $a_{03} \neq 0$, $b_{03} - a_{12} = 0$ и что состояние равновесия $B(u = \frac{b_{03} - a_{12}}{a_{03}}, z = 0$ так же является простым узлом. Теорема доказана.

Пример 1. Система дифференциальных уравнений $\frac{dx}{dt} = x - y - 2xy^2 + y^3$, $\frac{dy}{dt} = y - y^3$ имеет в КЧП три простых узла: $(0;0),)(0;-1), (0;1)$, а в БЧП - восьмисепаратрисное седло $A(u = z = 0)$ и простой узел $B(u = -3, z = 0)$.

Теорема 6. Если система (1) имеет в БЧП сложную точку покоя, индекс Пуанкаре которой равен 3, то в КЧП эта система имеет либо одно простое седло, либо одно простое седло и двукратный седлоузел, либо три простых седла, либо одно сложное трехкратное седло. В БЧП наряду с данной сложной точкой покоя система имеет также простую точку покоя типа седла или узла.

Доказательство. Согласно теореме 3 к особой точке $A(u = z = 0)$ примыкают четыре эллиптических сектора и не примыкает ни один гиперболический сектор, если предположить, что $J(A) = 3$. Очевидно, в условиях данной теоремы система (1) приводится к виду (27). Поэтому любая особая точка системы (27) в КЧП расположена на инвариантной прямой $y = y_i$, где y_i - корень уравнения (γ). При этом никакие две особые точки не лежат на одной инвариантной прямой. Поскольку каждая особая точка системы (27) в КЧП является обыкновенной (неособой) точкой изоклины бесконечности, то простая точка покоя может быть только седлом, а сложная - либо седлоузлом, либо топологическим седлом [6]. Если уравнение (γ) имеет два действительных корня, то один их них простой, а другой - двукратный. Следовательно, в КЧП система (1) имеет одно простое седло и один двукратный седлоузел. в БЧП по необходимости система имеет, кроме $A(u = z = 0)$, одно простое седло. Если уравнение (γ) имеет три различных действительных корня, то каждому из них соответствует одно простое седло.

В БЧП наряду с точкой $A(u = z = 0)$ система имеет один простой узел. Теорема доказана.

Пример 2. Система дифференциальных уравнений $\frac{dx}{dt} = -x + y + y^2 + 2xy^2$, $\frac{dy}{dt} = y - 2y^2 + y^3$ имеет в КЧП простое седло $(0;0)$ и двукратный седлоузел (-2;1), а в БЧП - состояние равновесия $A(u = z = 0)$ с четырьмя эллиптическими секторами и простое седло $D(v = z = 0)$.

Пример 3. $\frac{dx}{dt} = -x + y + xy + y^2 + 2xy^2$, $\frac{dy}{dt} = y + y^2 + y^3$.

Единственная точка покоя системы в КЧП - простое седло (0;0), а в БЧП эта система имеет точку покоя $A(u = z = 0)$ с четырьмя эллиптическими секторами и простое седло $D(v = z = 0)$.

Пример 4. $\frac{dx}{dt} = -x - 2y + xy + 4xy^2$, $\frac{dy}{dt} = y - y^3$.

В КЧП расположены три простых седла: (0;0), (-1;-1), $(\frac{1}{2};1)$, а в БЧП - простой узел $D(v = z = 0)$ и состояние равновесия $A(u = z = 0)$ с четырьмя эллиптическими секторами.

Пример 5. $\frac{dx}{dt} = -x + xy + 2xy^2$, $\frac{dy}{dt} + y^3$. Единственное состояние равновесия (0;0) системы в КЧП является топологическим седлом. В БЧП наряду с точкой покоя $A(u = z = 0)$, к которой примыкают четыре эллиптических сектора, система имеет простое седло $D(v = z = 0)$.

Из теорем 4 - 6 и ранее полученных результатов работы [4] следует

Теорема 7. Сумма индексов Пуанкаре бесконечно удаленных особых точек системы (1) удовлетворяет условию

$$-2 \leqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant 4} J_i \leqslant 4$$

Далее рассмотрим случай, когда система (1) имеет в БЧП три состояния равновесия, в том числе два простых и одно сложное, индекс J которого удовлетворяет условию $|J| = 2$.

Теорема 8. Если система (1) имеет в БЧП два простых состояния равновесия и одно сложное с индексом $J = -2$, то возможны только следующие случаи распределения простых состояний равновесия: а) узел и седло; б) два узла.

Справедливость данной теоремы следует из теоремы 7.

Пример 6. $\frac{dx}{dt} = -4y - 4x^2y - 5xy^2$, $\frac{dy}{dt} = 7x + 7y - 7xy^2 - 7y^3$

В КЧП система имеет три простых фокуса: (0; 0), (2; -2), (-2; 2), а в БЧП - шестисепаратрисное седло $A(u = z = 0)$, простой узел $D(v = z = 0)$ и простое седло $B(u = -\frac{3}{2}, z = 0)$.

Пример 7. $\frac{dx}{dt} = -4y - 6x^2y - 5xy^2$, $\frac{dy}{dt} = 7x + 7y - 7xy^2 - 7y^3$.

$(0, 0)$ - единственная точка покоя системы в КЧП, и она является простым фокусом. В БЧП эта система имеет шестисепаратрисное седло $A(u = z = 0)$ и два простых узла $D(u = z = 0)$ и $B(u = -\frac{1}{2};\ z = 0)$.

Теорема 9. Пусть система (1) имеет в БЧП три состояния равновесия, в том числе два сложных. Если одно из сложных состояний равновесия имеет индекс Пуанкаре $J = -2$, то для двух других состояний равновесия возможны следующие случаи распределения: 1) топологический узел и простой узел; 2) топологическое седло и простой узел; 3) седлоузел и простой узел.

Доказательство. Без ограничения общности рассуждений считаем, что $A(u = z = 0), B(u = 1, z = 0), D(v = z = 0)$ - исследуемые состояния равновесия, при этом полагаем $J(A) = -2$. Поэтому выполняются условия (20), (21) и кроме того, $b_{12} - a_{21} + b_{03} - a_{12} = 0$ (29). В силу (20) и теоремы 3 состояния равновесия $A(u = z = 0)$ системы (3) есть шессепаратрисное седло.

Перенесем начало координат системы (3) в точку B:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= (b_{03} - a_{12})u + (b_{11} - a_{20} + b_{02} - a_{11} - a_{02})z + 2(b_{03} - a_{12})u^2 + \\ &+ (b_{11} - a_{20} + 2b_{02} - 2a_{11} - 3a_{02})uz + (b_{10} + b_{01} - a_{10} - a_{01})z^2 + \\ &+ (b_{03} - a_{12})u^3 + (b_{02} - a_{11} - 3a_{02})u^2z + (b_{01} - a_{10} - 2a_{01})uz^2 + \\ &+ (b_{00} - a_{00})z^3 - a_{02}u^3z - a_{01}u^2z^2 - a_{00}uz^3, \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= -(a_{21} + a_{12})z - (a_{21} + 2a12)uz - (a_{20} + a_{11} + a_{02})z^2 - a_{12}u^2z - \\ &-(a_{11} + 2a_{02})uz^2 - (a_{10} + a_{01})z^3 - a_{02}u^2z^2 - a_{01}uz^3 - a_{00}z^4\end{aligned}$$

Система (4) в условиях данной теоремы запишется в виде:

$$\frac{dv}{dt} = (a_{12} - b_{03})v + a_{02}z + (b_{03} - a_{12})v^2 + (a_{11} - b_{02})vz + a_{01}z^2 +$$

$$+(a_{20}-b_{11})v^2z+(a_{10}-b_{01})vz^2+a_{00}z^3-b_{10}v^2z^2-b_{00}vz^3, \tag{31}$$

$$\frac{dz}{dt}=-b_{03}z-b_{12}vz-b_{02}z^2-b_{11}vz^2-b_{01}z^3-b_{10}vz^3-b_{00}z^4$$

Из (30) и (31) согласно [6] следует, что будучи кратной особой точкой, каждая из точек B и D является либо седлоузлом, либо топологическим седлом, либо топологическим узлом (один из характеристических корней отличен от нуля). Одновременно B и D не могут быть сложными. Отсюда в силу теоремы 7 логически возможны следующие случаи распределения точек покоя B и D: 1) топологический узел и простой узел; 2) топологическое седло и простой узел; 3) седлоузел и простой узел; 4) топологический узел и простой седло.

Покажем, что случай 4) не реализуется и приведем примеры систем (1), удовлетворяющих случаям 1) - 3). Тем самым будет доказана теорема.

Итак, предположим, что B - сложная точка покоя, то есть D - седло, а B - топологический узел. Тогда по необходимости выполняются условия: $a_{21}+a_{12}=0$, $b_{12}=-b_{03}\neq 0$. Очевидно, $a_{21}\cdot a_{12}\neq 0$, так как в противном случае в правой части первого уравнения системы (1) отсутствуют кубические члены.

Перепишем систему (3) при сделанных ограничениях на коэффициенты в следующем виде:

$$\frac{du}{dt}=(a_{12}-b_{03})u^2+(b_{11}-a_{20})uz+b_{10}z^2+(b_{03}-a_{12})u^3+$$
$$+(b_{02}-a_{11})u^2z+(b_{01}-a_{10})uz^2+b_{00}z^3-a_{02}u^3z-$$
$$-a_{01}u^2z^2-a_{00}uz^3\equiv\overline{P}(u,z), \tag{32}$$

$$\frac{dz}{dt}=(a_{12}uz-a_{20}z^2-a_{12}u^2z-a_{11}uz^2-a_{10}z^3-$$
$$-a_{02}u^2z^2-a_{01}uz^3-a_{00}z^4\equiv\overline{Q}(u,z)$$

Уравнение возможных критических направлений [9] в особой точке (0;0) системы (32) имеет вид: $Z(b_{03}u^2-b_{11}uz-b_{10}z^2)=0$ (33). Из (33) в силу $b_{03}\neq 0$ следует, что $z=0$ - простое обыкновенное критическое направление [9]. Следуя Фроммеру [9], рассмотрим функцию

$$\psi(\mu,u)=\frac{\overline{Q}(u,\mu u)}{\overline{P}(u,\mu u)}-\mu. \tag{34}$$

Производная функции (34) по μ в точке (0;0) имеет вид:

$$\psi'_\mu(0,0)=\frac{b_{03}}{a_{12}-b_{03}} \qquad (35).$$

По предположению D – простое седло, следовательно, имеет место неравенство $b_{03}(a_{12}-b_{03})>0$ (см. систему (31)). Из последнего неравенства в силу (35) следует неравенство $\psi'_\mu(0,0)>0$. Это означает, что в направлении прямой $z=0$ в особую точку A входит бесконечное множество траекторий [9], причем как слева, так и справа от A.

Особо следует отметить, что в достаточно малой окрестности точки A как в полуплоскости $z<0$, так и в полуплоскости $z>0$ расположено бесконечное множество траекторий, стремящихся к A в направлении $z=0$. При этом траектории, расположенные слева (справа) от точки A, стремятся к ней при $t\to+\infty(t\to-\infty)$ или $t\to-\infty(t\to+\infty)$. Это не трудно видеть из рассмотрения правых частей системы (32).

Рассмотрим прямую $y=-mx+n$ (δ), где m - сколь угодно близкое к нулю положительное число, n - сколь угодно большое положительное число. На фазовой плоскости системы (3) ((4)) прямой (δ) соответствует прямая $z=\frac{1}{n}u+\frac{m}{n}$ (η) $(z=\frac{m}{n}v+\frac{1}{n}$ $(\omega))$. Прямая (ω) имеет, по крайней мере, один контакт с траекторией системы (4) в гиперболическом секторе, примыкающем к седлу D, а прямая (η) пересекает три гиперболических сектора, примыкающих к точке A и расположенных в полуплоскости $z>0$. Иначе говоря, прямая (η) имеет три контакта с траекториями системы (3). Согласно лемме 3 прямая (δ) имеет не менее четырех контактов с траекториями системы (1), что противоречит следствию 1.

Пусть теперь D - топологический узел, а B - простое седло, тогда $b_{03} = 0$, $a_{12} \neq 0$, $b_{12} = a_{21} + a_{12}$, $a_{12}(a_{12} + a_{21}) < 0$ (36). Впрочем, из неравенства (36) следует также, что $a_{21} \neq 0$. При сделанных предположениях система (3) имеет вид:

$$\frac{du}{dt} = a_{12}u^2 + (b_{11} - a_{20})uz + b_{10}z^2 - a_{12}u^3 + (b_{02} - a_{11})u^2z +$$
$$+ (b_{01} - a_{10})uz^2 + b_{00}z^3 - a_{02}u^3z - a_{01}u^2z^2 - a_{00}uz^3, \quad (37)$$

$$\frac{du}{dt} = -a_{21}uz - a_{20}z^2 - a_{12}u^2z - a_{11}uz^2 - a_{10}z^3 - a_{02}u^2z^2 - a_{01}uz^3 - a_{00}z^4$$

Уравнение возможных критических направлений в особой точке (0;0) системы (37) имеет вид:

$z((a_{21} + a_{12})u^2 + b_{11}uz + b_{10}z^2) = 0$. Так как $a_{21} + a_{12} \neq 0$, то $z = 0$ - простое обыкновенное критическое направление. Производная функции (37) задается формулой

$$\psi'_\mu(0,0) = -\frac{a_{21} + a_{12}}{a_{12}} \quad (38).$$

Из (38) в силу неравенства (36) следует, что $\psi'_\mu(0,0) > 0$, то есть в точку A в направлении прямой $z = 0$ входит бесконечное множество траекторий, т.е. снова приходит к противоречию со следствием 1.

Приведем примеры, иллюстрирующие случаи 1) - 3) распределения особых точек D и B.

Пример 8.

$$\frac{dx}{dt} = 4x + 8y - x^2 - 4xy + y^2 + 4x^2y - 4xy^2,$$

$$\frac{dy}{dt} = -8x + 8y + 8xy^2 - 8y^3.$$

В КЧП система имеет два простых состояния равновесия: (3;3) - устойчивый фокус, а в БЧП - шестисепаратрисное седло $A(u = z = 0)$, $B(u = 1, z = 0)$ - седлоузел, $D(v = z = 0)$ - простой неустойчивый узел.

Пример 9.

$$\frac{dx}{dt} = -x - y - x^2y - xy^2,$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x - 2xy^2.$$

Два седлоузла (-1;1), (1;-1) и простой устойчивый фокус (0;0) расположены в КЧП. Точками покоя системы в БЧП являются шестисепаратрисное седло $A(u = z = 0)$, топологический узел $D(v = z = 0)$ и простой неустойчивый узел $B(u = 1, z = 0)$.

Пример 10.

$$\frac{dx}{dt} = 20x + 36y - 7x^2 + 9xy - 11x^2y11xy^2,$$

$$\frac{dy}{dt} = 22x - 22xy^2.$$

В КЧП система имеет пять простых состояний равновесия: (0;0) - седло, (-1;1), (3;-1), (2;1), (-3;-1) - узлы, а в БЧП - шестисепаратрисное седло $A(u = z = 0)$, топологическое седло $D(v = z = 0)$ и простой узел $B(u = 1, z = 0)$.

Тем самым доказана теорема и закончено исследование бесконечно удаленных особых точек системы (1) в случае, когда их число равно трем, и среди них имеется одна с индексом $J = -2$.

Далее рассмотрим случай, когда система (1) имеет в БЧП три состояния равновесия, и одно из них имеет индекс $J = 2$.

Теорема 10. Пусть система (1) имеет в БЧП три состояния равновесия, в том числе два сложных. Если одно из сложных состояний равновесия имеет индекс Пуанкаре $J = 2$, то для двух других состояний равновесия возможны следующие случаи их распределения: 1) топологическое седло и простой узел; 2) топологическое седло и простое седло; 3) топологический узел и простое седло; 4) топологический узел и простой узел; 5) седлоузел и простое седло; 6) седлоузел и простой узел.

Пример 11.

$$\frac{dx}{dt} = -2x^2y + xy^2,$$

$$\frac{dy}{dt} = 1 - x + y^2 - xy^2.$$

Простые состояния равновесия: (1;0) - седло, (1;2) - устойчивый фокус расположены в КЧП. В БЧП система имеет состояние равновесия $A(u = z = 0)$, к которому примыкают два эллиптических и два параболических сектора, седлоузел $D(v = z = 0)$ и простое седло $B(u = 1, z = 0)$.

Пример 12.

$$\frac{dx}{dt} = 2x + y + x^2y - xy^2,$$

$$\frac{dy}{dt} = x - y - xy^2 + y^3.$$

Начало координат (0;0) - единственная особая точка данной системы, и она является простым седлом. Особыми точками в БЧП являются: точка $A(u = z = 0)$, к которой примыкают два эллиптических и два параболических сектора, топологическое седло $B(u = 1, z = 0)$, простой устойчивый узел $D(v = z = 0)$.

Пример 13.

$$\frac{dx}{dt} = -4x + 36y - 7x^2 + 9xy - 11x^2y + 13xy^2,$$

$$\frac{dy}{dt} = -2x + 2xy^2.$$

Четыре седла: (-1;1), (2;1), (-3;-1), (3;-1) и простой устойчивый фокус (0;0) - состояния равновесия системы в КЧП.

В БЧП эта система имеет три состояния равновесия, в том числе: точку $A(u = z = 0)$, к которой примыкают два эллиптических и два параболических сектора, простой устойчивый узел $B(u = 1, z = 0)$ и топологический узел $D(v = z = 0)$.

Пример 14.

$$\frac{dx}{dt} = -4x - 17y + 3x^2y - xy^2,$$

$$\frac{dy}{dt} = -2y + 2xy^2.$$

Единственная точка покоя (0;0) системы в КЧП является простым устойчивым узлом. В БЧП наряду с особой точкой $A(u = z = 0)$, к которой примыкают два эллиптических и два параболических сектора, система имеет простое седло $B(u = 1, z = 0)$ и топологическое седло $D(v = z = 0)$.

Пример 15.

$$\frac{dx}{dt} = -4x + 17y + 3x^2y - xy^2,$$

$$\frac{dy}{dt} = -2y + 2xy^2.$$

Устойчивый узел (0;0), простые седла $(4;\frac{1}{4}), (-4;-\frac{1}{4})$ расположены в КЧП, а точка $A(u = z = 0)$ с двумя эллиптическим и двумя параболическими секторами, простое седло $B(u = 1, z = 0)$ и топологический узел $D(v = z = 0)$ лежат на экваторе сферы Пуанкаре.

Пример 16.

$$\frac{dx}{dt} = 3 - x^2y + 2xy^2,$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + xy^2.$$

Особыми точками системы в КЧП являются простые седла (3;1) и (-1;1). В БЧП система имеет три особые точки: седлоузел $D(v = z = 0)$, простой устойчивый узел $B(u = 1, z = 0)$ и точку $A(u = z = 0)$ с двумя эллиптическими и двумя параболическими секторами.

Теорема 11. Пусть система (1) имеет в БЧП три состояния равновесия, в том числе одно кратное. Если кратное состояние равновесия имеет индекс Пуанкаре $J = 2$, то для простых состояний равновесия возможны следующие случаи распределения: 1) два узла; 2) два седла; 3) седло и узел.

Пример 17.

$$\frac{dx}{dt} = -8x - 51y + 12x^2y - 9xy^2,$$

$$\frac{dy}{dt} = -6y + 9xy^2 - 6y^3.$$

В КЧП расположено единственное состояние равновесия (0;0) - простой устойчивый узел, а на экваторе сферы Пуанкаре система имеет точку равновесия $A(u = z = 0)$, к которой примыкают два эллиптических и два параболических сектора, простые седла $D(v = z = 0)$ и $B(u = 1, z = 0)$.

Пример 18.

$$\frac{dx}{dt} = -6x + 16y - 6x^2y + 2xy^2,$$

$$\frac{dy}{dt} = -2y - 2xy^2 - 2y^3.$$

Система имеет в КЧП два простых седла (2;-1), (-2;1) и простой устойчивый узел (0;0), а в БЧП - особую точку $A(u = z = 0)$ с двумя эллиптическими и двумя параболическими секторами, простое седло $B(u = 1, z = 0)$ и простой неустойчивый узел $D(v = z = 0)$.

Пример 19.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{3}x - \frac{16}{9}y - x^2y + 2xy^2,$$

$$\frac{dy}{dt} = -2y + 3xy^2 - 2y^3.$$

В КЧП система имеет три простых седла: (0;0), $(\frac{4}{3};1)$, $(-\frac{4}{3};-1)$, а в БЧП - состояние равновесия $A(u = z = 0)$ с двумя эллиптическими и двумя параболическими секторами и простые узлы $B(u = 1, z = 0)$, $D(v = z = 0)$.

Литература

1. Шарипов Ш. Р. О распределении особых точек на экваторе сферы Пуанкаре /Ш.Р. Шарипов// Труды Самаркандского государственного университета имени Алишера Навои. - Самарканд: Изд-во гос. университета, 1964. - Вып. є144. - С. 89-92.

2. Хайрутдинов И.В. О бесконечно удаленных особых точках системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + bx^3 + (c-\beta)x^2y + (3d-\gamma)xy^2 + fy^3, \\ \frac{dx}{dt} = -x + ax^3 - (3b+\alpha)x^2y - (c+\beta)xy^2 - dy^3, \end{cases}$$

если (0;0) - центр / И.В. Хайрутдинов // Ученые записки Душанбинского пед. ин-та. - Душанбе, 1963. - Вып. 4. - С. 53-58.

3. Хайрутдинов И.В. О сожительстве особых точек различных типов на сфере Пуанкаре для одной системы дифференциальных уравнений / И.В. Хайрутдинов // Ученые записки Душанбинского пед. ин-та. - Душанбе, 1963. - Вып. 4. - С. 59-62.

4. Ушхо Д.С. Особые точки кубической дифференциальной системы на экваторе сверы Пуанкаре // Д.С. Ушхо, А.Д. Ушхо // Труды ФОРА. - 2006. - є11. - С.40-68.

5. Ушхо Д.С. Особые точки кубической дифференциальной системы на экваторе сферы Пуанкаре / Д.С. Ушхо, О.А. Пономарева // Вестник Адыгейского государственного университета. - Майкоп: Изд-во АГУ, 2007. - С. 20-24.

6. *Андронов А.А.* Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. - М.: Наука, 1966. - 568 с.

7. Уокер Р. Алгебраические кривые / Р. Уокер. - М.: Изд-во иностранной литературы, 1952. - 236 с.

8. Морозов В.В. О кривых, определенных дифференциальным уравнением / В.В. Морозов // Труды Казанского института инженеров коммунального строительства. - Вып. IV, 1936.

9. Фроммер М. Интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения в окрестности особой точки, имеющей рациональный характер / М. Фроммер // Успехи математических наук. - 1941. - Вып. 9. - С. 212-253.

Examination of perpetually remote singular points of cubic differential system in one case

D.S. Uskho, A.D. Uskho

Operation is prolongation of the examination spent in the notice [4]. It is proved, that the total of indexes of Poincare of the cubic differential system arranged on equator of an orb of Poincare, satisfies to an inequality $-2 \leqslant \sum J \leqslant 4$. It is erected also, that index J separately the taken singular point of system on equator of an orb of Poincare satisfies to an inequality $|J| \leqslant 3$. the statement is valid: if the cubic system has on perpetuity an equilibrium point with an index $J = \pm 3$, that this system, except the specified equilibrium point, by all means has one more perpetually removed, besides a simple stationary point. The behaviour of a trajectory of cubic system on perpetuity in a case when number of its stationary points there to equally three, and the index of one of them is equal $J = \pm 2$ is completely studied.

