2007 г. Труды ФОРА №12

СРАВНЕНИЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ С БЛИЗКИМИ НУЛЯМИ

А.Б.Шишкин

Славянский на Кубани государственный педагогический институт, г. Славянск-на-Кубани

Классические теоремы сравнения целых функций конечного порядка с близкими нулями распространяются на случай нулевого порядка.

В классической теории целых функций конечного порядка исследуется зависимость поведения модуля функции от распределения ее корней. В настоящей работе задача зависимости поведения функции от распределения корней рассматривается под другим углом зрения: как изменится поведение функции, если ее корни заменить на другие, достаточно близкие к первым? Первый результат в этом направлении получил Б.Я.Левин [1]: каноническое произведение (в случае целого порядка берется особым образом "урезанное"каноническое произведение) с корнями λ_k $(k = 1, 2, ...)$ можно сколь угодной "малой погрешностью"заменять каноническим произведением с корнями вида $\lambda_k e^{i\theta_k}$, если только числа θ_k по абсолютной величине достаточно малы. Этот результат позволяет сравнивать только те функции, корни которых различаются по аргументу. В работе И.Ф.Красичкова-Терновского [2] устанавливается аналогичная теорема сравнения при более широких предположениях.

Множеством кружков E называется объединение счетной совокупности кружков $o_i = \{z : |z - h_i| \leqslant \rho_i\}$ $(i = 1, 2, ...)$, причем предполагается, что в ограниченной части комплексной плоскости может содержаться лишь конечное число кружков o_i. Множество кружков E *центрировано* множеством P, если каждая точка P принадлежит по крайней мере одному кружку множества E и каждый кружок множества E содержит по крайней мере одну точку из P. *Переменной линейной плотностью* множества кружков E называется функция

$$p_E(r) = \frac{1}{r}\sum_{|h_i|\leqslant r}\rho_i \ (r > 0),$$

линейной плотностью множества E называется величина

$$p_E = \overline{\lim_{r\to+\infty}}\, p_E(r).$$

Последовательность комплексных чисел $\Gamma = \{\gamma_i\}$ называется *d-близкой* к последовательности $\Lambda = \{\lambda_i\}$, если $|\gamma_i - \lambda_i| \leqslant d|\lambda_i|$, $i = 1, 2, ...$ Множество G называется *σ-удаленным* от множества P, если $\inf\limits_{h\in P} |h - z| > \sigma\, |z|$ для любой точки $z \in G$.

Выберем неотрицательную функцию μ, определенную на луче $t \geqslant 0$. Считаем, что она не убывает, дифференцируема в окрестности $+\infty$ и $\rho(t) = \frac{\ln\mu(t)}{\ln t}$ — уточненный порядок, то есть

$$\lim_{t\to+\infty}\rho(t) = \rho, \ \lim_{t\to+\infty} t\rho'(t)\ln t = 0 \ (0 < \rho < +\infty).$$

Для упрощения изложения будем обозначать символом $O_{x_1,...,x_n}(y)$ произведение величины, модуль которой ограничен сверху числом, зависящим только от переменных $x_1, ..., x_n$ на y. В работе [2] доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть целая функция* $f(z)$ *удовлетворяет условию*

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\ln M_f(r)}{\mu(r)} \leqslant c \quad (0 < c < \infty), \tag{1}$$

$g(z)$ — целая функция с последовательностью корней $\Gamma = \{\gamma_i\}$ $(i = 1, 2, ...)$, d-близкой к последовательности корней $\Lambda = \{\lambda_i\}$ $(i = 1, 2, ...)$ функции $f(z)$; G_σ — некоторое множество, σ-удаленное от Λ. Если

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln\ln M_g(r)}{\ln\mu(r)} < \infty \tag{2}$$

и $0 < \frac{d}{1-d} < \sigma \leqslant 1$, то существует число $l < \infty$, зависящее от $f(z)$ и $g(z)$, такое, что при $|z| > l$, $z \in G_\sigma$

$$\ln|g(z)| - \ln|f(z)| = O_\rho\left(\frac{cd}{\sigma^p}\right)\left(p + \frac{d^p}{\sigma - \frac{d}{1-d}}\right)\mu(|z|),$$

если $\rho \notin N$, и

$$\ln|g(z)| - \ln|f(z)| - \operatorname{Re}\left[(a_g - a_f)\, z^p + \sum_{0<\lambda_i\leqslant|z|}\left(\frac{z}{\gamma_i}\right)^p - \left(\frac{z}{\lambda_i}\right)^p\right] =$$

$$= O_\rho\left(\frac{cd}{\sigma^p}\right)\left(p + \frac{d^{p-1}}{\sigma - \frac{d}{1-d}}\right)\mu(|z|),$$

если $\rho \in N$. Здесь $p = [\rho]$, a_f — коэффициент при старшем члене многочлена $P(z) = a_f z^p + ...$ в представлении Адамара

$$f(z) = z^m \exp\{P(z)\} \prod\left(1 - \frac{z}{\lambda_i}\right)\exp\left\{\frac{z}{\lambda_i} + ... + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{\lambda_i}\right)^p\right\}.$$

Теорема 2. *Пусть $f(z)$ — целая функция, удовлетворяющая условию (1), и $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta \leqslant 1$. Тогда любой целой функции $g(z)$, удовлетворяющей условию (2), с последовательностью корней $\Gamma = \{\gamma_i\}$ $(i = 1, 2, ...)$, d-близкой $\left(0 \leqslant d < \frac{1}{2}\right)$ к последовательности корней $\Lambda = \{\lambda_i\}$ $(i = 1, 2, ...)$ функции $f(z)$, можно поставить в соответствие множество кружков E_g со свойствами:*

1) *множество E_g центрировано с множеством $\Gamma \bigcup \Lambda$,*

2) *линейная плотность множества E_g не превосходит βd^{α^2},*

3) *при $z \notin E_g$*

$$\ln|g(z)| - \ln|f(z)| = O(c)\frac{d^{1-\alpha}}{\alpha\beta\sin\pi\alpha}\mu(|z|).$$

если $\rho \notin N$, и

$$\left|\ln|g(z)| - \ln|f(z)| - \operatorname{Re}\left[(a_g - a_f)\, z^p + \sum_{0<\lambda_i\leqslant|z|}\left(\frac{z}{\gamma_i}\right)^p - \left(\frac{z}{\lambda_i}\right)^p\right]\right| =$$

$$= O_\rho(c)\frac{d^{1-\alpha}}{\alpha\beta\sin\pi\alpha}\mu(|z|),$$

если $\rho \in N$.

Ниже будет доказано, что теоремы 1 и 2 остаются справедливыми, если $\rho = 0$ и выполнено дополнительное условие: для любых $A, B > 0$ при всех достаточно больших t выполняется неравенство

$$\mu(t) \geqslant A\ln Bt. \tag{3}$$

Будем рассматривать лишь случай $\rho = 0$. Прежде всего отметим, что условие $\rho = 0$ означает, что

$$\lim_{t\to+\infty}\rho(t) = \lim_{t\to+\infty}\frac{\ln\mu(t)}{\ln t} = 0.$$

Поэтому из условия $t\rho'(t)\ln t = \frac{\mu'(t)t}{\mu(t)} - \frac{\ln\mu(t)}{\ln t} \to 0$, $t \to +\infty$ вытекает, что

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\mu'(t)t}{\mu(t)} = 0.$$

Выберем произвольную последовательность $\Lambda = \{\lambda_i\}$ отличных от нуля комплексных чисел с единственной предельной точкой в бесконечности и будем предполагать, что выбранная последовательность удовлетворяет условию

$$\int_0^r \frac{n(t;\Lambda)}{t}dt \leqslant \omega(r)\mu(r), \tag{4}$$

где $\omega(t)$ интегрируема по Риману, равна нулю в некотором интервале $[0, t_0)$ и подчинена условию $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}}\,\omega(t) \leqslant c$ $(0 < c < \infty)$. Здесь $n(t;\Lambda)$ — число точек λ_i (с учетом их кратностей) в круге $\{z : |z| \leqslant t\}$. Отметим, что из (4) и неравенства $n(r;\Lambda) \leqslant \int_r^{er} \frac{n(t;\Lambda)}{t}dt$ вытекает, что при любом $r \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$n(r;\Lambda) \leqslant \omega(er)\mu(er).$$

При достаточно больших r это неравенство можно уточнить. Действительно, при достаточно больших t имеем $\left(\frac{\mu(t)}{t}\right)' = \left(\frac{\mu'(t)t}{\mu(t)} - 1\right)\frac{\mu(t)}{t^2} < 0$. Поэтому разность $\mu(qt) - q\mu(t) = qt\left(\frac{\mu(qt)}{qt} - \frac{\mu(t)}{t}\right)$ и разность $1 - q$ имеют один и тот же знак, то есть при достаточно больших t и $q > 1$

$$\mu(qt) < q\mu(t).$$

Следовательно, при достаточно больших r и $q > \frac{1}{e}$ будут выполняться неравенства $n(qr;\Lambda) \leqslant \omega(eqr)\mu(eqr) \leqslant 2ceq\mu(r)$, другими словами,

$$n(qr;\Lambda) = O(cq)\mu(r). \tag{5}$$

Пусть Γ — последовательность, d-близкая к Λ $(0 < d \leqslant \frac{1}{2})$. Используя неравенство $n(t;\Gamma) \leqslant n\left(\frac{t}{1-d};\Lambda\right)$, нетрудно показать, что Γ удовлетворяет аналогичному (4) условию

$$\int_0^r \frac{n(t;\Gamma)}{t}dt \leqslant \Omega(r)\mu(r), \tag{6}$$

где $\Omega(r) \leqslant \frac{\omega\left(\frac{r}{1-d}\right)}{1-d}$, значит, $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}}\,\Omega(r) \leqslant 2c$. Следовательно, при достаточно больших r и $q > \frac{1}{e}$

$$n(qr;\Gamma) = O(cq)\mu(r). \tag{7}$$

Обозначим $\Delta_\sigma(z)$ круг $\{h : |h - z| \leqslant \sigma\,|z|\}$ и по последовательностям Λ, Γ составим произведения:

$$G(z;\Lambda) = \prod\left(1 - \frac{z}{\lambda_i}\right),\quad G(z;\Gamma) = \prod\left(1 - \frac{z}{\gamma_i}\right)$$

$$G_\sigma(z;\Lambda) = \prod_{\lambda_i\notin\Delta_\sigma(z)}\left(1 - \frac{z}{\lambda_i}\right),\quad G_\sigma(z;\Gamma|\Lambda) = \prod_{\lambda_i\notin\Delta_\sigma(z)}\left(1 - \frac{z}{\gamma_i}\right).$$

Нетрудно показать, что каждое из этих трех произведений сходится при любом значении z и удовлетворяет соотношению типа (1). Убедимся в этом на примере произведения $G_\sigma(z;\Gamma|\Lambda)$.

Прежде всего,

$$\ln|G_\sigma(z;\Gamma|\Lambda)| \leqslant \sum \ln\left(1 + \frac{|z|}{|\gamma_i|}\right) = \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{|z|}{t}\right)dn(t;\Gamma).$$

При этом

$$\int_0^{|z|} \ln\left(1+\frac{|z|}{t}\right) dn(t;\Gamma) = n(t;\Gamma)\ln\left(1+\frac{|z|}{t}\right)\Big|_0^{|z|} + \int_0^{|z|} \frac{|z|n(t;\Gamma)}{(t+|z|)t}dt \leqslant$$

$$\leqslant n(|z|;\Gamma)\ln 2 + \int_0^{|z|} \frac{n(t;\Gamma)}{t}dt,$$

$$\int_{|z|}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{|z|}{t}\right) dn(t;\Gamma) = n(t;\Gamma)\ln\left(1+\frac{|z|}{t}\right)\Big|_{|z|}^{+\infty} + \int_{|z|}^{+\infty} \frac{|z|n(t;\Gamma)}{(t+|z|)t}dt \leqslant$$

$$\leqslant -n(|z|;\Gamma)\ln 2 + \frac{O(c)}{1-o(1)}\mu(|z|)\ln 2,\ |z|\to+\infty,$$

так как

$$n(t;\Gamma)\ln\left(1+\frac{|z|}{t}\right) = O(c|z|)\frac{\mu(t)}{t} = O(c|z|)t^{\frac{\ln\mu(t)}{\ln t}-1} \to 0,\ t\to+\infty,$$

и в силу (7)

$$\int_{|z|}^{+\infty} \frac{|z|n(t;\Gamma)}{(t+|z|)t}dt \leqslant O(c)\int_{|z|}^{+\infty} \frac{|z|\mu(t)}{(t+|z|)t}dt =$$

$$= O(c)\left(\mu(t)\ln\frac{t}{t+|z|}\Big|_{|z|}^{+\infty} + \int_{|z|}^{+\infty}\mu'(t)\ln\left(1+\frac{|z|}{t}\right)dt\right) =$$

$$= O(c)\mu(|z|)\ln 2 + o(1)\int_{|z|}^{+\infty}\frac{|z|\mu(t)}{t(t+|z|)}dt,\ |z|\to+\infty.$$

В итоге, при достаточно больших $|z|$ имеем

$$\ln|G_\sigma(z;\Gamma|\Lambda)| = O(c)\mu(|z|).$$

Аналогично убеждаемся в справедливости и двух других соотношений

$$\ln|G(z;\Lambda)| = O(c)\mu(|z|),\ \ln|G_\sigma(z;\Lambda)| = O(c)\mu(|z|). \tag{8}$$

Теорема 3. *Пусть последовательность* $\Lambda = \{\lambda_i\}$ $(\lambda_i \neq 0;\ i = 1,2,...)$ *удовлетворяет условию* (4), Γ — *d-близкая к* Λ *последовательность. Если*

$$0 < \frac{d}{1-d} < \sigma \leqslant 1, \tag{9}$$

то существует число $l < \infty$, *зависящее только от функций* ω *и* μ, *такое, что при* $|z| > l$

$$|\ln|G_\sigma(z;\Gamma|\Lambda)| - \ln|G_\sigma(z;\Lambda)|| = \frac{O(cd)}{\sigma-\frac{d}{1-d}}\mu(|z|). \tag{10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При доказательстве теоремы 1 из [2] показано, что

$$|\ln|G_\sigma(z;\Gamma|\Lambda)| - \ln|G_\sigma(z;\Lambda)|| = \frac{O(d)}{1-\frac{d}{(1-d)\sigma}}J(z),$$

где

$$J(z) = \sum_{|\lambda_i|\leqslant 2|z|,\ \lambda_i\notin\Delta_\sigma(z)} \frac{\left|\frac{z}{\lambda_i}\right|}{\left|1-\frac{z}{\lambda_i}\right|} + \sum_{|\lambda_i|>2|z|,\ \lambda_i\notin\Delta_\sigma(z)} \frac{\left|\frac{z}{\lambda_i}\right|}{\left|1-\frac{z}{\lambda_i}\right|} = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Так как $\lambda_i \notin \Delta_\sigma(z)$, то $\left|1-\frac{z}{\lambda_i}\right| > \left|\frac{z}{\lambda_i}\right|\sigma$. Поэтому

$$\Sigma_1 < \frac{1}{\sigma}\sum_{|\lambda_i|\leqslant 2|z|} 1 = \frac{1}{\sigma} n(2|z|;\Lambda).$$

В силу (5) найдется число $l < \infty$, зависящее только от функции ω такое, что при $|z| > l$ имеем

$$\Sigma_1 = O\left(\frac{c}{\sigma}\right)\mu\left(|z|\right). \tag{11}$$

В то же время, для членов ряда, входящих в Σ_2, справедлива оценка

$$\frac{\left|\frac{z}{\lambda_i}\right|}{\left|1-\frac{z}{\lambda_i}\right|} \leqslant \frac{\left|\frac{z}{\lambda_i}\right|}{1-\frac{|z|}{|\lambda_i}} < 2\left|\frac{z}{\lambda_i}\right| < 1,$$

откуда следует, что

$$\Sigma_2 < \sum_{|\lambda_i|>2|z} 1 = n(2|z|;\Lambda).$$

В силу (5) при $|z| > l$ имеем

$$\Sigma_2 = O(c)\mu\left(|z|\right). \tag{12}$$

Из (11), (12) следует, что справедлива формула (10). Теорема доказана.

Как показано в [2] при помощи теоремы 3 можно сравнивать модули произведений $G(z;\Gamma)$ и $G(z;\Lambda)$ на множествах, удаленных от Λ. Действительно, пусть последовательность Λ удовлетворяет условию (4), Γ — последовательность, d-близкая к Λ, а G_σ — множество, σ-удаленное от Λ. Предположим, что числа d, σ связаны условием (9). В силу того, что G_σ σ-удалено от Λ, при $z \in G_\sigma$ в круге $\Delta_\sigma(z)$ не содержится ни одной точки $\lambda_i \in \Lambda$. Поэтому при $z \in G_\sigma$ имеем:

$$G(z;\Lambda) = G_\sigma(z;\Lambda),\ G(z;\Gamma) = G_\sigma(z;\Gamma|\Lambda).$$

Отсюда на основании теоремы 3 получаем следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_i\}$ ($\lambda_i \neq 0; i = 1, 2, ...$) удовлетворяет условию (4), Γ — d-близкая к Λ последовательность, а G_σ — множество σ-удалено от Λ. Если $0 < \frac{d}{1-d} < \sigma \leqslant 1$, то существует число $l < \infty$, зависящее только от функций ω и μ, такое, что при $|z| > l$ и $z \in G_\sigma$*

$$\ln|G(z;\Gamma)| - \ln|G(z;\Lambda)| = \frac{O(cd)}{\sigma - \frac{d}{1-d}}\mu(|z|). \tag{13}$$

Из теоремы 4 вытекает справедливость теоремы 1. Пусть f удовлетворяет условию (1). На основании формулы Иенсена нетрудно убедиться, что последовательность $\Lambda = \{\lambda_i\}$ корней f удовлетворяет условию типа (4), где $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\ \omega(t) \leqslant c$. Пусть G_σ — некоторое множество, σ-удаленное от Λ; $g(z)$ — целая функция, удовлетворяющая условию (2), с последовательностью корней $\Gamma = \{\gamma_i\}$, d-близкой к последовательности корней функции f, и $0 < \frac{d}{1-d} < \sigma \leqslant 1$. По теореме 4 существует число $l < \infty$, зависящее только от $\omega(t)$, такое, что при $|z| > l$ имеет место оценка 13. Осталось заметить, что в силу условий (1) и (2) функции f и g являются функциями рода нуль. Кроме того, условие (3) позволяет считать, что $f(0) = 1$, $g(0) = 1$. Следовательно, по теореме Адамара $f(z) = G(z;\Lambda)$, $g(z) = G(z;\Gamma)$.

Выше произведения $G(z;\Gamma)$, $G(z;\Lambda)$ сравнивались лишь на классе множеств, удаленных от Λ. Между тем, для некоторых последовательностей Λ этот класс может содержать лишь ограниченные множества. Поэтому естественно попытаться распространить теорему 4, хотя бы и в ослабленной форме, на более широкий класс множеств, например дополнительных к множествам кружков с малой линейной плотностью, центрированных с $\Gamma\bigcup\Lambda$.

Лемма 1. *Пусть последовательность точек* $\Lambda = \{\lambda_i\}$ $(|\lambda_i| > l;\ i = 1, 2, ...)$ *удовлетворяет условию*

$$\sup_{r \geqslant l} \frac{1}{\mu(r)} \int_0^r \frac{n(t;\Lambda)}{t} dt = D < \infty.$$

Тогда для любых чисел N, σ, *где* $N > 0$, $0 < \sigma < 1$, *существует множество кружков* E *со свойствами:*

1) *каждый кружок* E *содержит по крайней мере одну точку* λ_i*;*

2) *переменная линейная плотность* E *при любом значении* $r > 0$ *не превосходит величины*

$$\frac{2\sigma}{1-\sigma} \frac{D}{N} \left(1 + \sup_{t \geqslant \frac{l}{2}} \left|1 - \frac{\mu'(t)t}{\mu(t)}\right|\right) \sup_{t \geqslant \frac{l}{2}} \frac{\mu(2et)}{\mu(t)}$$

3) $n_\sigma(z, \Lambda) < N\mu(|z|)$ *при* $z \notin E$.

Здесь $n_\sigma(z, \Lambda)$ — *число точек последовательности* Λ *в круге* $\Delta_\sigma(z)$.

Д о к а з а т е л ь ст в о. Следуя работе [2, лемма 3], построим последовательность точек $H = \{h_i\}$ $(i = 1, 2, ...)$ и убывающую цепочку последовательностей $\Lambda = \Lambda^{(0)} \supseteq \Lambda^{(1)} \supseteq ...$, обладающих следующим свойством: если круг $\Delta_\sigma(z)$ не пересекается не с каким кругом $\Delta_\sigma(h_k)$ $(k = 1, 2, ...)$, то $n_\sigma(z, \Lambda) < N\mu(|z|)$. Положим $\delta = \frac{2\sigma}{1-\sigma}$. Нетрудно показать, что если точка z лежит вне круга $\Delta_\sigma(h)$, то круги $\Delta_\sigma(h)$ и $\Delta_\sigma(z)$ не пересекаются. Отсюда следует, что для любой точки z, лежащей вне системы кругов $\Delta_\delta(h_i)$ $(i = 1, 2, ...)$, круг $\Delta_\sigma(z)$ не пересекается ни с каким кругом $\Delta_\sigma(h_i)$ $(i = 1, 2, ...)$ и следовательно, в круге $\Delta_\sigma(z)$ содержится не менее $N\mu(|z|)$ точек λ_i. Положим

$$E = \bigcup_{h_i \in H} \Delta_\sigma(h_i)$$

Из вышеизложенного следует, что

$$n_\sigma(z, \Lambda) < N\mu(|z|) \text{ при } z \notin E.$$

Оценим переменную плотность $p_E(r)$. Имеем

$$rp_E(r) = \delta \sum_{|h_i| \leqslant r} |h_i|,$$

и задача свелась к оценке суммы $\sum\limits_{|h_i| \leqslant r} |h_i|$. Пусть $m(t)$ — число точек $|h_i|$ в интервале $(0, t]$. Так как $|h_0| \geqslant \frac{l}{1+\sigma} > \frac{l}{2}$, то $m(t) = 0$ при $0 < t \leqslant \frac{l}{2}$. Поэтому

$$\sum_{|h_i| \leqslant r} |h_i| = \int_0^r t\,dm(t) = \int_{\frac{l}{2}}^r t\,dm(t). \tag{14}$$

Оценим последний интеграл. С этой целью, учитывая, что в каждом круге $\Delta_\sigma(h_k)$ $(k = 1, 2, ...)$ содержится не менее $N\mu(|z|)$ точек из $\Lambda^{(k)}$ и при этом разные круги содержат только разные точки, напишем цепочку неравенств

$$N \sum_{|h_i| \leqslant r} \mu(|h_i|) \leqslant \sum_{|h_i| \leqslant r} n_\sigma(h_i, \Lambda^{(i)}) \leqslant n(r(1+\sigma), \Lambda) \leqslant n(2r, \Lambda) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{2r}^{2er} \frac{n(t, \Lambda)}{t} dt \leqslant D\mu(2er).$$

Из этих неравенств вытекает оценка:

$$\Phi(r) = \int_{\frac{l}{2}}^r \mu(t)\,dm(t) = \sum_{|h_i| \leqslant r} \mu(|h_i|) \leqslant \frac{D}{N} \mu(2er).$$

Используя эту оценку имеем:

$$\int\limits_{\frac{l}{2}}^{r} tdm(t) = \int\limits_{\frac{l}{2}}^{r} \frac{t}{\mu(t)}\mu(t)dm(t) = \int\limits_{\frac{l}{2}}^{r} \frac{t}{\mu(t)}d\Phi(t) =$$

$$= \frac{t}{\mu(t)}\Phi(t)\Big|_{\frac{l}{2}}^{r} - \int\limits_{\frac{l}{2}}^{r} \Phi(t)\frac{\mu(t)-t\mu'(t)}{\mu^2(t)}dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r}{\mu(r)}\Phi(r) + \sup_{t\geqslant\frac{l}{2}}\left|1-\frac{\mu'(t)t}{\mu(t)}\right| \int\limits_{\frac{l}{2}}^{r} \frac{\Phi(t)}{\mu(t)}dt \leqslant$$

$$\leqslant r\frac{D}{N}\frac{\mu(2er)}{\mu(r)} + r\frac{D}{N}\sup_{t\geqslant\frac{l}{2}}\left|1-\frac{\mu'(t)t}{\mu(t)}\right| \sup_{t\geqslant\frac{l}{2}}\frac{\mu(2et)}{\mu(t)} \leqslant$$

$$\leqslant r\frac{D}{N}\left(1+\sup_{t\geqslant\frac{l}{2}}\left|1-\frac{\mu'(t)t}{\mu(t)}\right|\right)\sup_{t\geqslant\frac{l}{2}}\frac{\mu(2et)}{\mu(t)}.$$

Из этой оценки и формулы (14) вытекает неравенство для переменной линейной плотности $p_E(r)$. Лемма доказана.

Опираясь на лемму 1, буквальным повторением доказательств лемм 4 и 5 из [2] доказываем следующие леммы.

Лемма 2. *Пусть последовательность* $\Lambda = \{\lambda_i\}$ $(i = 1, 2, ...)$ *удовлетворяет условию*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{1}{\mu(r)}\int_0^r \frac{n(t;\Lambda)}{t}dt \leqslant c \ (0 < c < \infty) \tag{15}$$

и $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta \leqslant 1$. *Тогда каждому числу* s $(0 < s \leqslant 1)$ *Можно поставить в соответствие множество кружков* E_s *таким образом, что выполняются условия:*

1) *множество* E_s *центрировано с* Λ,
2) $E_{s'} \supseteq E_{s''}$ *при* $s' > s''$,
3) *линейная плотность* E_s *не превосходит* βs^{α},
4) *при* $z \notin E_s$

$$\sup_{0<t<s}\frac{n_t(z;\Lambda)}{t^{1-\alpha}} = O\left(\frac{c}{\alpha\beta}\right)\mu(|z|).$$

Лемма 3. *Пусть последовательность* Λ *удовлетворяет условию* (15) *и* $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta \leqslant 1$. *тогда каждой последовательности* Γ, d*-близкой к* Λ $(0 < d \leqslant \frac{1}{2})$, *можно поставить в соответствие множество кружков* E_Γ *со свойствами:*

1) E_Γ *центрировано с* $\Gamma\bigcup\Lambda$,
2) *линейная плотность* E_Γ *не превосходит* βd^{α^2},
3) *при* $z \notin E_\Gamma$

$$\int\limits_0^1 \frac{n_t(z;\Gamma)-n_t(z;\Lambda)}{t(1+t)}dt = O(c)\frac{d^{1-\alpha}}{\alpha\beta\sin\pi\alpha}\mu(|z|).$$

Теперь все готово для доказательства основной теоремы сравнения канонических произведений.

Теорема 5. *Пусть последовательность* $\Lambda = \{\lambda_i\}$ $(\lambda_i \neq 0, i = 1, 2, ...)$ *удовлетворяет условию (4) и* $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta \leqslant 1$. *Тогда любой последовательности* Γ, d*-близкой к* Λ $\left(0 < d \leqslant \frac{1}{2}\right)$, *можно поставить в соответствие множество кружков* E_Γ *со свойствами:*

1) E_Γ *центрировано с* $\Gamma\bigcup\Lambda$,

2) *линейная плотность множества* E_Γ *не превосходит* βd^{α^2},
3) *при* $z \notin E_\Gamma$

$$\ln|G(z;\Gamma)| - \ln|G(z;\Lambda)| = O(c)\frac{d^{1-\alpha}}{\alpha\beta\sin\pi\alpha}\mu(|z|). \tag{16}$$

Доказательство получаем путем адаптирования к случаю $\rho = 0$ доказательства теоремы 4 из [2]. Для последовательностей $\Lambda = \{\lambda_i\}$, $\Gamma = \{\gamma_i\}$ (λ_i, $\gamma_i \neq 0$, $i = 1, 2, ...$) составим суммы

$$A_\sigma(z;\Lambda) = \sum_{\lambda_i\in\Delta_\sigma(z)} \ln\left|1-\frac{z}{\lambda_i}\right|,\ A_\sigma(z;\Gamma|\Lambda) = \sum_{\lambda_i\in\Delta_\sigma(z)} \ln\left|1-\frac{z}{\gamma_i}\right|,$$

$$L_\sigma(z;\Lambda) = \sum_{\lambda_i\in\Delta_\sigma(z)} \ln\frac{|z|+|\lambda_i-z|}{|\lambda_i|},\ L_\sigma(z;\Gamma|\Lambda) = \sum_{\lambda_i\in\Delta_\sigma(z)} \ln\frac{|z|+|\gamma_i-z|}{|\gamma_i|}.$$

Обозначим через $n_{t,\sigma}(z;\Gamma|\Lambda)$ число точек γ_i принадлежащих кругу $\Delta_t(z)$, с индексами, удовлетворяющими условию $\lambda_i \in \Delta_\sigma(z)$. В работе [2, лемма 6] доказано, что при любом $\sigma > 0$ выполняются следующие соотношения

$$A_\sigma(z;\Lambda) - L_\sigma(z;\Lambda) \equiv n_\sigma(z;\Lambda)\ln\frac{\sigma}{1+\sigma} - \int_0^\sigma \frac{n_t(z;\Lambda)}{t(1+t)}dt, \tag{17}$$

$$A_\sigma(z;\Gamma|\Lambda) - L_\sigma(z;\Gamma|\Lambda) \equiv n_{s,\sigma}(z;\Gamma|\Lambda)\ln\frac{s}{1+s} - \int_0^s \frac{n_{t,\sigma}(z;\Gamma|\Lambda)}{t(1+t)}dt, \tag{18}$$

где $s = d + \sigma + \sigma d$.

Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_i\}$ ($\lambda_i \neq 0$, $i = 1, 2, ...$) удовлетворяет условию (4), последовательность Γ является d-близкой к Λ и $0 < d \leqslant \frac{1}{2}$, $0 < \sigma \leqslant 1$. Как показано в [2, лемма 7], существует число $l < \infty$, зависящее только от $\omega(t)$, такое, что при $|z| > l$

$$L_\sigma(z;\Lambda) = O(c)\mu\left(|z|\right),\ L_\sigma(z;\Gamma|\Lambda) - L_\sigma(z;\Lambda) = O(cd)\mu\left(|z|\right). \tag{19}$$

Воспользуемся представлениями:

$$\ln|G(z;\Lambda)| = \left(A_\sigma\left(z;\Lambda\right) - L_\sigma\left(z;\Lambda\right)\right) + L_\sigma\left(z;\Lambda\right) + \ln\left|G_\sigma(z;\Lambda)\right|, \tag{20}$$

$$\ln|G(z;\Gamma)| = \left(A_\sigma\left(z;\Gamma|\Lambda\right) - L_\sigma\left(z;\Gamma|\Lambda\right)\right) + L_\sigma\left(z;\Gamma|\Lambda\right) + \ln\left|G_\sigma(z;\Gamma|\Lambda)\right|. \tag{21}$$

Положим в (20) $\sigma = 1$ и применим к соответствующим компонентам полученного представления соотношения (17), (19) и (8). Получим оценку

$$\ln|G(z;\Lambda)| = -\int_0^1 \frac{n_t(z;\Lambda)}{t(1+t)}dt + O(c)\mu(|z|). \tag{22}$$

Аналогичная оценка, в силу условия (6), будет справедлива и для любой последовательности Γ, d-близкой к Λ ($0 < d \leqslant \frac{1}{2}$).

Используя (20) и (21), напишем представление для разности

$$\ln|G(z;\Gamma)| - \ln|G(z;\Lambda)| = \left(A_\sigma\left(z;\Gamma|\Lambda\right) - L_\sigma\left(z;\Gamma|\Lambda\right)\right) - \left(A_\sigma\left(z;\Lambda\right) - L_\sigma\left(z;\Lambda\right)\right) +$$
$$+\left(L_\sigma\left(z;\Gamma|\Lambda\right) - L_\sigma\left(z;\Lambda\right)\right) + \left(\ln|G_\sigma(z;\Gamma|\Lambda)| - \ln|G_\sigma(z;\Lambda)|\right). \tag{23}$$

Положим в 23 $\sigma = 1$ и применим к соответствующим компонентам полученного представления оценки (17), (18), (19) и теорему 3. Получим такую оценку:

$$\ln|G(z;\Gamma)| - \ln|G(z;\Lambda)| =$$

$$= n_{1+2d,1}(z;\Gamma|\Lambda)\ln\frac{1+2d}{2+2d} - \int\limits_0^{1+2d}\frac{n_{t,1}(z;\Gamma|\Lambda)}{t(1+t)}dt - n_1(z;\Lambda)\ln\frac{1}{2}+$$

$$+\int\limits_0^1\frac{n_t(z;\Lambda)}{t(1+t)}dt + O(cd)\mu(|z|) + O(cd)\left(1+\frac{1}{1-\frac{d}{1-d}}\right)\mu(|z|) \quad (|z|>l;\ 0<d\leqslant\frac{1}{2}).$$

Замечаем, что $n_{1+2d,1}(z;\Gamma|\Lambda) = n_1(z;\Lambda)$ и что $1+\frac{d^p}{1-\frac{d}{1-d}}\leqslant 3$ при $0<d\leqslant\frac{1}{4}$. Поэтому

$$\ln|G(z;\Gamma)| - \ln|G(z;\Lambda)| = \int\limits_0^1\frac{n_t(z;\Lambda)-n_{t,1}(z;\Gamma|\Lambda)}{t(1+t)}dt-$$

$$-\int\limits_1^{1+2d}\frac{n_{t,1}(z;\Gamma|\Lambda)}{t(1+t)}dt + O(cd)\mu(|z|) = -\int\limits_0^1\frac{n_{t,1}(z;\Gamma|\Lambda)-n_t(z;\Lambda)}{t}dt+$$

$$+O(cd)\mu(|z|) \quad (|z|>l;\ 0<d\leqslant\frac{1}{4}). \tag{24}$$

При $0<t\leqslant 1-2d$, в силу $\frac{d}{1-d}$-близости последовательности Λ к последовательности Γ, из $\gamma_i\in\Delta_t(z)$ следует $\gamma_i\in\Delta_1(z)$. Поэтому при таких значениях t $n_{t,1}(z;\Gamma) = n_t(z;\Gamma)$. Отсюда имеем:

$$\int\limits_0^1\frac{n_{t,1}(z;\Gamma|\Lambda)}{t(1+t)}dt = \int\limits_0^{1-2d}\frac{n_{t,1}(z;\Gamma|\Lambda)}{t(1+t)}dt + \int\limits_{1-2d}^1\frac{n_{t,1}(z;\Gamma|\Lambda)}{t(1+t)}dt =$$

$$= \int\limits_0^{1-2d}\frac{n_{t,1}(z;\Gamma)}{t(1+t)}dt + O_\rho(cd)\mu(|z|) = \int\limits_0^1\frac{n_{t,1}(z;\Gamma)}{t(1+t)}dt - \int\limits_{1-2d}^1\frac{n_t(z;\Gamma)}{t(1+t)}dt+$$

$$+O(cd)\mu(|z|) = \int\limits_0^1\frac{n_t(z;\Gamma)}{t(1+t)}dt + O(cd)\mu(|z|) \quad (|z|>l).$$

Подставляя в (24), получим оценку

$$\ln|G(z;\Gamma)| - \ln|G(z;\Lambda)| = -\int\limits_0^1\frac{n_t(z;\Gamma)-n_t(z;\Lambda)}{t(1+t)}dt + O(cd)\mu(|z|). \tag{25}$$

Эта оценка выведена в предположении, что $0<d\leqslant\frac{1}{4}$. Однако, в силу оценки (22) и аналогичной оценки для Γ, оценка вида (25) будет справедлива для всех значений d из интервала $0<d\leqslant\frac{1}{2}$. Осталось к интегралу в (25) применить лемму 3. Теорема доказана.

Теперь все готово для доказательства теоремы 2. Пусть $f(z)$ удовлетворяет условию (1). На основании формулы Иенсена нетрудно убедиться, что последовательность $\Lambda = \{\lambda_i\}$ корней $f(z)$ удовлетворяет условию типа (4), где $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\,\omega(t)\leqslant c$. Пусть $g(z)$ — целая функция, удовлетворяющая условию (2), с последовательностью корней $\Gamma = \{\gamma_i\}$, d-близкой к последовательности корней функции $f(z)$, и $0<\frac{d}{1-d}<\sigma\leqslant 1$. По теореме 5 последовательности Γ можно поставить в соответствие центрированное с $\Gamma\bigcup\Lambda$ множество кружков E_Γ с линейной плотностью, не превосходящей βd^{α^2}, такое, что при $z\notin E_\Gamma$ справедлива оценка (16). По теореме Адамара $f(z) = az^\alpha G(z;\Lambda)$, $g(z) = bz^\beta G(z;\Gamma)$. При этом в силу (3)

$$\ln|az^\alpha| - \ln|bz^\beta| = o\left(\mu(|z|)\right),\ z\to\infty. \tag{26}$$

Значит, существует такое число $l < \infty$, что при $|z| > l$, $z \notin E_\Gamma$

$$\ln|g(z)| - \ln|f(z)| = O_\rho(c)\frac{d^{1-\alpha}}{\alpha\beta\sin\pi\alpha}\mu(|z|),$$

Если l — достаточно большое число, то круг $\{z : |z| \leqslant l\}$ будет содержать точки $\Gamma\bigcup\Lambda$ и, следовательно, множество кружков $E_g = \{z : |z| \leqslant l\}\bigcup E_\Gamma$ будет центрировано с $\Gamma\bigcup\Lambda$. Линейная плотность множества E_g равна линейной плотности множества E_Γ и не превосходит βd^{α^2}.

Литература

1. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций / Москва. Гостехиздат, 1956. – 632 с.

2. *Красичков И.Ф.* Сравнение целых функций конечного порядка по распределению их корней // Мат.сб. – 1966. – Т.70(112). – No 2. – С. 198-230.

Comparison of the whole functions with close zeros

A.B. Shishkin

The classical theorems of comparison of the whole final order functions with close zeros are extended on a case of a zero order.

