2006 г. **№11**

Труды ФОРА

О ЧИСЛЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СЕКТОРОВ, ПРИМЫКАЮЩИХ К ОСОБОЙ ТОЧКЕ

Д.С. Ушхо

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

Долгое время считалось, что число e эллиптических секторов, примыкающих к особой точке $(0,0)$ A_m-системы

$$\frac{dx}{dt} = P_m(x,y) + \varphi(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = Q_m(x,y) + \psi(x,y)$$

удовлетворяет неравенству $e \leqslant 2m-2$, установленному В.В. Морозовым. Однако, в работах А.Н. Берлинского, опубликованных в ДАН СССР в 1967 и 1969 гг. доказано, что существуют A_m-системы, имеющие $2m-1$ эллиптических секторов, примыкающих к сложной изолированной особой точке. В данной заметке определяются необходимые условия существования $2m-1$ эллиптических секторов, примыкающих к сложной изолированной особой точке A_m-системы в случае, когда $y=0$ – инвариантная прямая. Используя эти результаты доказано, что для кубической системы на экваторе сферы Пуанкаре упомянутая оценка В.В. Мрозова о числе эллиптических секторов верна.

Рассмотрим автономную дифференциальную систему

$$\frac{dx}{dt} = P_m(x,y) + \varphi(x,y) \equiv P(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = Q_m(x,y) + \psi(x,y) \equiv Q(x,y), \tag{1}$$

где P и Q – аналитические функции, $(P,Q)=1$, P_m, Q_m – однородные многочлены степени $m \geqslant 1$, $|P_m| + |Q_m| \not\equiv 0$, $\varphi = o(r^m)$, $\psi = o(r^m)$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

Достаточно малая окрестность особой точки системы (1), отличной от центра и фокуса, состоит из конечного числа эллиптических, гиперболических и параболических секторов, именно они определяют топологическую структуру особой точки. Индекс Пуанкаре особой точки определяется числом эллиптических и гиперболических секторов, примыкающих к ней. Эта причина определяет важность знания числа эллиптических секторов, расположенных в достаточно малой окрестности сложной изолированной особой точки системы (1).

И. Бендиксон [1] показал, что число e эллиптических секторов, примыкающих к точке покоя $(0,0)$ системы (1), удовлетворяет неравенству

$$e \leqslant 2m. \tag{2}$$

Впоследствии В.В. Морозов [2] пришел к заключению, что справедливо неравенство

$$e \leqslant 2m-2. \tag{3}$$

В работе [3] доказано, что существуют системы вида (1), имеющие $2m-1$ эллиптических секторов, примыкающих к началу координат $O(0,0)$. Так, к особой точке $(0,0)$ системы

$$\frac{dx}{dt} = (y+x^2)(y+3x^2)\cdot\ldots\cdot[y+(2m-1)x^2], \quad \frac{dy}{dt} = xy(y+2x^2)\cdot\ldots\cdot[y+(2m-1)x^2]$$

примыкают $2m-1$ эллиптических секторов, то есть ни для одного значения m не выполняется неравенство (3). Придерживаясь терминологии [3, 4] систему (1) будем называть A_m-системой. В упомянутой работе [3] доказана теорема 1, согласно которой для A_m-системы (1) верна оценка

$e \leqslant 2m-1$, и она не улучшаема. В заметке [4] найдены все пары чисел (e, h), которые соответствуют классам, порождаемым A_m-системами при фиксированном m, и в каждом классе установлена топологическая структура неустойчивой особой точки с минимальным для данного класса числом параболических секторов, примыкающих к точке $(0,0)$.

В настоящей работе находятся необходимые условия того, что A_m-система (1), обладающая инвариантной прямой $y=0$, имеет ровно $2m-1$ эллиптических секторов. Используя эти условия доказывается, что кубическая дифференциальная система не имеет на экваторе сферы Пуанкаре сложной особой точки, к которой примыкают $2m-1$ эллиптических секторов, то есть, что верна оценка (3) при $m>1$.

Лемма 1. Пусть $Q(x,0) \equiv 0$. Если $e = 2m-1$ – число эллиптических секторов, примыкающих к особой точке $(0,0)$ A_m-системы (1), то $Q_m(x,y) \equiv 0$.

Доказательство. Следуя терминологии [4], всякое связное подмножество О-ветви, для которого точка $O(0,0)$ является предельной, будем называть существенной частью этой ветви. Пусть

$$x = x(t), \;\; y = y(t) \tag{4}$$

одна из траекторий эллиптического сектора, примыкающего к точке $O(0,0)$. Тогда как при $t \to +\infty$, так и при $t \to -\infty$, $y(t) \to 0$, $\frac{dy}{dt} \to 0$. Это означает, что функция $y = y(t)$ имеет, по крайней мере, один экстремум и две точки перегиба. Поэтому справедливо утверждение о том, что каждый эллиптический сектор, примыкающий к точке $O(0,0)$, содержит существенную часть хотя бы одной О-ветви изоклины нуля $Q(x,y)=0$ и существенные части хотя бы двух О-ветвей кривой

$$Q(x,y)\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y} + P(x,y)\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 0.$$

Так как по условию леммы прямая $y=0$ является инвариантной для системы (1) и $e = 2m-1$, то к началу координат примыкают не менее чем $2m+1$ О-ветвей кривой $Q(x,y)=0$. Иначе говоря, индекс ветвления [5] кривой $Q(x,y)=0$ в точке $(0,0)$ не меньше $2m+1$. Принимая во внимание лемму из работы [3], приходим к выводу, что $Q_m(x,y) \equiv 0$. Лемма доказана.

Замечание 1. Если в формулировке Леммы 1 заменить условие $Q(x,0) \equiv 0$ условием $P(0,y) \equiv 0$, то будет выполнено равенство $P_m(x,y) \equiv 0$.

Следствие 1. Если число e эллиптических секторов, примыкающих к особой точке $(0,0)$ A_m-системы (1), удовлетворяет условию $e = 2m-1$, то $P^2(0,y) + Q^2(x,0) \not\equiv 0$.

Лемма 2. Пусть $Q(x,0) \equiv 0$. Если число e эллиптических секторов, примыкающих к особой точке $(0,0)$ A_m-системы (1), удовлетворяет условию $e = 2m-1$, то $P'_{mx}(x,y) \equiv 0$.

Доказательство. Так как $Q(x,0) \equiv 0$ и $e = 2m-1$, то по лемме 1 система (1) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = P_m(x,y) + \varphi(x,y) \equiv P(x,y), \;\; \frac{dy}{dt} = \psi(x,y), \tag{5}$$

где $P_m(x,y) \not\equiv 0$, $\varphi = o(r^m)$, $\psi = o(r^m)$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

Согласно работе [3] каждый эллиптический сектор, примыкающий к особой точке $(0,0)$ A_m-системы (1), содержит существенные части, по крайней мере, двух О-ветвей кривой

$$(P'_{mx}(x,y) + \varphi'_x(x,y))(P_m(x,y) + \varphi_x(x,y)) = 0 \tag{6}$$

и существенную часть, по крайней мере, одной О-ветви кривой

$$P_m(x,y) + \varphi_x(x,y) = 0. \tag{7}$$

Пусть (4) – траектория эллиптического сектора, примыкающего к точке покоя $O(0,0)$.
Введем обозначения:
$\dot{l}$ – существенная часть О-ветви кривой (7), состоящая из точек экстремумов функций $x(t)$,
$\ddot{l}$ – существенная часть О-ветви кривой (6), состоящая из точек перегиба функций $x(t)$.

Очевидно, $\dot{l} \bigcap \ddot{l} = \emptyset$. По условию существует не менее $2m-1$ О-ветвей кривой (7) с существенной частью $\dot{l}$ и не менее $4m-2$ О-ветвей кривой (6) с существенной частью $\ddot{l}$. Учитывая, что индекс ветвления кривой (7) в точке $(0,0)$ не превосходит $2m$ (см. [3]) приходим к выводу, что индекс ветвления кривой $P'_{mx}+\varphi'_x=0$ не менее чем $4m-3$. Поэтому согласно лемме из работы [3] $P'_{mx}(x,y)\equiv 0$. Лемма доказана.

Замечание 2. Условие $P'_{mx}(x,y)\equiv 0$ с учетом $P_m(x,y)\not\equiv 0$ равносильно тождеству $P_m(x,y)\equiv \alpha y^m$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq 0$. Последнее тождество является условием касания всех O-траекторий системы (5) оси ox в точке $(0,0)$ и O-ветвей изоклины бесконечности.

Из работы [3] и доказанных выше лемм следует

Теорема 1. Если $Q(x,0)\equiv 0$ и $Q^2_m(x,y)+P'^2_{mx}\not\equiv 0$, то для A_m-системы (1) верна оценка (3) числа эллиптических секторов, примыкающих к особой точке $(0,0)$.

Далее рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=\sum_{i+j=0}^{3}a_{ij}x^iy^j\equiv P_3(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=\sum_{i+j=0}^{3}b_{ij}x^iy^j\equiv Q_3(x,y),\tag{8}$$

где

$$a_{ij},b_{ij}\in\mathbb{R},\quad (P_3,Q_3)=1,\quad \sum_{i+j=3}|a_{ij}|>0,\quad \sum_{i+j=3}|b_{ij}|>0.$$

Для исследования характера ее бесконечно-удаленных особых точек воспользуемся преобразованием Пуанкаре $x=1/z$, $y=u/z$ [6]:

$$\begin{aligned}
\tfrac{du}{dt}&=b_{30}+(b_{21}-a_{30})u+b_{20}z+(b_{12}-a_{21})u^2+(b_{11}-a_{20})uz+b_{10}z^2+\\
&+(b_{03}-a_{12})u^3+(b_{02}-a_{11})u^2z+(b_{01}-a_{10})uz^2+b_{00}z^3-a_{03}u^4-\\
&\qquad -a_{02}u^3z-a_{01}u^2z^2-a_{00}uz^3\equiv\overline{P}(u,z),\\
\tfrac{dz}{dt}&=-a_{30}z-a_{21}uz-a_{20}z^2-a_{12}u^2z-a_{11}uz^2-a_{10}z^3-a_{03}u^3z-\\
&\qquad -a_{02}u^2z^2-a_{01}uz^3-a_{00}z^4\equiv\overline{Q}(u,z).
\end{aligned}\tag{9}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
\overline{P_2}(u,z)&=(b_{12}-a_{21})u^2+(b_{11}-a_{20})uz+b_{10}z^2\\
\overline{P_3}(u,z)&=(b_{03}-a_{12})u^3+(b_{02}-a_{11})u^2z+(b_{01}-a_{10})uz^2+b_{00}z^3\\
\overline{Q_2}(u,z)&=-a_{21}uz-a_{20}z^2,\ \overline{Q_3}(u,z)=-a_{12}u^2z-a_{11}uz^2-a_{10}z^3.
\end{aligned}$$

Теорема 2. Система дифференциальных уравнений (8) не имеет на экваторе сферы Пуанкаре [6] сложной особой точки, к которой примыкают более двух эллиптических секторов (более четырех эллиптических секторов), если выполняется условие

$$\overline{P_2}^2(u,z)+\overline{Q_2}^2(u,z)\not\equiv 0\tag{10}$$

(условие (10) не выполняется, но выполняется неравенство

$$\overline{P_3}^2(u,z)+\overline{Q_3}^2(u,z)\not\equiv 0.)\tag{11}$$

Доказательство. Предположим, что условие (10) не выполняется, но имеет место неравенство (11), и при этом система (9) имеет сложную особую точку, к которой примыкают пять эллиптических секторов (согласно [3] число эллиптических секторов не более пяти). Не сужая общности считаем, что исследуемая особая точка есть $B(0,0)$. Согласно замечанию 2 к лемме 2 в правой части первого уравнения системы (9) равны нулю все члены, предшествующие одночлену $b_{00}z^3$, $b_{00}\neq 0$. В правой части второго уравнения этой системы равны нулю все слагаемые до третьего измерения включительно. Поэтому не выполняется ограничение на коэффициенты

$$\sum_{i+j=3}|b_{ij}|>0.$$

Тем самым доказана невозможность наличия у системы (9) пяти эллиптических секторов примыкающих к точке покоя $B(0,0)$.

Пусть теперь выполняется (10), причем к точке $B(0,0)$ примыкают три эллиптических сектора. Согласно замечанию 2 к лемме 2 система (9) имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= b_{10}z^2 + (b_{03}-a_{12})u^3 + (b_{02}-a_{11})u^2z + (b_{01}-a_{10})uz^2 + b_{00}z^3 - a_{03}u^4 - \\ &\quad - a_{02}u^3z - a_{01}u^2z^2 - a_{00}uz^3 \equiv \overline{\overline{P}}(u,z), \\ \frac{dz}{dt} &= a_{12}u^2z - a_{11}uz^2 - a_{10}z^3 - a_{03}u^3z - a_{02}u^2z^2 - a_{01}uz^3 - a_{00}z^4 \equiv \overline{\overline{Q}}(u,z),\end{aligned} \tag{12}$$

где $b_{10} \neq 0$. Так как $z=0$ – инвариантная прямая системы (12), то нетрудно показать, что к точке $B(0,0)$ примыкают ровно четыре О-ветви изоклины бесконечности. Поэтому согласно [3] имеет место равенство

$$\overline{\overline{P}}(u,z) \equiv (z-\alpha_1(u))(z-\alpha_2(u))(1-\mu(u,z)), \tag{13}$$

где $\alpha_i(u)$ – голономные в окрестности точки $u=0$ функции, $\alpha_i(0)=\alpha_i'(0)=0, i=1,2$, $\mu(u,z)$ – аналитическая функция, $\mu(0,0)=0$. Впрочем, отсюда следует, что

$$b_{03}-a_{12}=0. \tag{14}$$

Можно утверждать, что $\alpha_1(u) = r_2u^2 + r_3u^3 + \cdots$, $\alpha_2(u) = s_2u^2 + s_3u^3 + \cdots$, где $r_2s_2 \neq 0$. Если допустить, что $r_2s_2=0$, то $\overline{\overline{P}}(u,0)$ содержит наименьшую степень u, не меньшую пяти, это противоречит виду (12).

Покажем, что $a_{12}=0$. Допустим, что это не так. Тогда $\overline{\overline{Q}}(u,\alpha_i(u))$ – функция, разложение которой начинается с четной степени u. Это означает, что для всех u, удовлетворяющих неравенству $0<|u|<\delta$ где δ сколь угодно малое положительное число, вектор поля системы (12) направлен вертикально вверх или вниз на кривой $z=\alpha_i(u), i=1,2$. Относительно взаимного расположения кривых $z=\alpha_1(u)$ и $z=\alpha_2(u)$ возможны два предположения:

а) обе кривые расположены в одной из полуплоскостей $z>0$ и $z<0$ (ради определенности полагаем $0 \leqslant \alpha_1(u) \leqslant \alpha_2(u), |u|<\delta$).

б) Кривые расположены в разных полуплоскостях (ради определенности полагаем $\alpha_1(u) \geqslant 0$, $\alpha_2(u) \leqslant 0$, $|u|<\delta$).

В каждом из случаев а) и б) не существует эллиптического сектора, содержащего существенную часть О-ветви кривой $u=0$. Следовательно, найдутся два эллиптических смежных сектора, расположенных либо выше, либо ниже прямой $z=0$, разделенных осью z.

В случае а) указанные секторы содержат существенные части О-ветвей кривой $z=\alpha_2(u)$, а в случае б) – существенные части О-ветвей либо кривой $z=\alpha_1(u)$, либо $z=\alpha_2(u)$. В случае а) параболический сектор между двумя смежными эллиптическими секторами содержит существенную часть хотя бы одной О-ветви кривой $\overline{\overline{P}}(u,z)=0$, то есть к точке $B(0,0)$ примыкают не менее пяти ветвей изоклины бесконечности системы (12). Это противоречит лемме из работы [3], согласно которой индекс кривой $\overline{\overline{P}}(u,z)=0$ в точке $B(0,0)$ не более четырех. Аналогично рассуждаем в случае б). Итак $a_{12}=0$. Возвращаясь к равенству (13), получаем условие $b_{03}=0$. Это же означает, что в системе (8) нарушено условие

$$\sum_{i+j=3} |b_{ij}| > 0.$$

Теорема доказана.

Следствие 2. Число эллиптических секторов, примыкающих к особой точке $B(0,0)$ системы (9) в случае выполнения (10) не превосходит двух, а в случае выполнения (11) не превосходит четырех.

Таким образом, для системы (9) верна оценка (3), полученная В.В. Морозовым [2] при $m>1$.

Литература

1. *Bendixson J.* Sur les courbes definies par des equations differentielles / J. Bendixson // Acta math. – 1901. – Vol. 24. P. 1-88.

2. *Морозов В.В.* О кривых, определенных дифференциальным уравнением / В.В. Морозов // Труды Казанского института инженеров коммунального строительства. – 1936. – Вып. IV.

3. *Берлинский А.Н.* О числе эллиптических областей, примыкающих к особой точке / А.Н. Берлинский // Доклады Академии наук СССР. – 1967. – Т. 178. – N 4. – С. 759-762.

4. *Берлинский А.Н.* К вопросу о структуре окрестности особой точки двумерной автономной системы / А.Н. Берлинский // Доклады Академии наук СССР. – 1969. – Т. 187. – N 3. – С. 502-505.

5. *Пархоменко А.С.* Что такое линия / А.С. Пархоменко. – М.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1952. – 236 с.

6. *Андронов А.А.* Качественная теория динамических систем второго порядка /А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. - М.: Наука, 1966. - 568 с.

About number of elliptical sectors adjoining to singular point

D.S. Ushkho

The number e of elliptical sectors adjoining to singular point $(0,0)$ of A_m-system

$$\frac{dx}{dt} = P_m(x,y) + \varphi(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = Q_m(x,y) + \psi(x,y)$$

the long time it was suppose satisfying inequality $e \leqslant 2m-2$, which V.V. Morosov was fixed. But in the Berlinks papers published in DAN USSR in 1967 and 1969 years was proved that are haved the A_m-system with $2m-1$ elliptical sectors adjoining to singular point. In this paper we find the existence necessary conditions $2m-1$ elliptical sectors adjoining to singular point for A_m-system in case when the $y=0$ is invariant straight line. On this basis are proved that for the cubic system on equator of Pounkare sphere the above-mentioned Morosovs estimation of number of elliptical sectors is positive.

