2004 г. Труды ФОРА №9

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ СЛУЧАЙНОГО ПОИСКА

А.Ш. Абакаров,*Ю.А. Сушков †‡

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург

Работа посвящена описанию и статистическим испытаниям одного способа организации ветвления случайного поиска, предназначенного для нахождения экстремума в первую очередь сложных овражных и многоэкстремальных функций. Приводятся сравнительные результаты с другими способами организации случайного поиска оптимума для ряда тестовых функций.

Введение

Многие задачи принятия решений, возникающие на производстве, в экономике и других областях человеческой деятельности могут быть сведены к построению соответствующей математической модели, вычислению целевой функции, оценивающей процесс функционирования системы, и нахождению ее оптимального (для определенности будем считать минимального) значения.

Если исследуемые системы достаточно сложны, то их математические модели и соответствующие целевые функции могут иметь ряд особенностей, в связи с чем их минимизация может быть связана со значительными вычислительными трудностями. К этим особенностям в первую очередь необходимо отнести свойства многоэкстремальности и овражности функций.

Значительные вычислительные трудности, связанные с минимизацией многоэкстремальных и овражных функций стандартными методами, а также несомненная важность этих классов задач для различных практических приложений (задач оптимального выбора технических, экономических, экологических и др. систем) делает весьма актуальной проблему поиска способа оптимизации, который будет успешно справляться с этими задачами.

В этой работе исследуется один из способов оптимизации такого рода функций, базирующийся на ветвлении адаптивного случайного поиска (СП) [1,2] путем распараллеливания его на ряд процессов. Далее отдельный процесс СП будем именовать ветвью.

Основной целью алгоритма с ветвлением здесь является:

– улучшение адаптивных свойств отдельной ветви СП (ВСП) за счет использования их зависимого функционирования, т.е. одна ветвь СП использует информацию о целевой функции, полученную другой ветвью СП;

– усиление адаптивных свойств всего процесса поиска за счет возможности распределить ветви СП по областям наиболее вероятного расположения оптимума.

К сказанному следует также добавить, что организация СП с ветвлением позволяет придать процессу поиска некоторые, ранее в явном виде отсутствующие, свойства известных генетических алгоритмов [4]. Таким образом, появляется возможность эффективнее решать некоторые задачи, для которых в настоящее время часто используются генетические алгоритмы. К таким задачам можно, например, отнести:

– задачу локализации и (или) определения нескольких (или всех) искомых оптимумов;

– задачу описания ландшафта целевой функции [4].

Перейдем к описанию алгоритма случайного поиска с ветвлением.

*alik@vega.math.spbu.ru.

†sushkov@vega.math.spbu.ru.

‡Работа выполнялась при поддержке гранта МО N E02-2.0-28.

Постановка задачи и описание алгоритма случайного поиска с ветвлением

Рассмотрим следующую задачу оптимизации: требуется определить такой вектор $x^* = \langle x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^* \rangle$, где $0 \le x_i \le 1$, $i \in 1:n$, при котором целевая функция $\Phi(x)$ при $x = x^*$ принимает минимальное значение. В общем виде поставленную задачу можно записать так:

$$\Phi(x) \to \min_{x \in X}, \tag{1}$$

где $x = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \in [0,1]^n$.

Условимся, что дополнительные ограничения на переменные $x_1, \dots, x_n$ учтены при построении целевой функции (например, при помощи штрафных функций [2]).

Поведение отдельно взятого процесса случайного поиска в общем виде можно представить следующим образом. Поиск разбивается на некоторое число шагов. На каждом шаге по определенному закону случайным образом выбираются значения вектора аргументов x, и подсчитывается значение целевой функции. На каждом шаге закон, по которому выбираются значения переменных x_i, изменяется таким образом, чтобы вероятность попадания в ε-окрестность истинного минимума, задаваемую пользователем исходя из требуемой точности решения задачи, увеличилась бы. Для этого используется информация, полученная на предыдущих шагах поиска.

Рассмотрим необходимое нам далее понятие *эффективной области* [1,2]. Пусть $I_i \subset [0,1]$ – *перспективный* [1,2] интервал для x_i, $i \in 1:n$, такой, что по полученным на предыдущих шагах данным наличие оптимального значения x_i^* внутри I_i наиболее вероятно. Пусть I обозначает декартово произведение интервалов I_i, $i \in 1:n$. Далее I будем называть *эффективной областью*, а через $x0_i$ обозначим координаты центра эффективной области, которые могут меняться после каждого шага случайного поиска.

Для непосредственного описания алгоритма СП с ветвлением введем следующие необходимые понятия:

— БРТ – *буфер рекордных точек* – область памяти, отведенная для хранения предыдущих рекордных точек, отбрасываемых, соответственно, после получения новых рекордных значений; один БРТ является общим для всех ВСП; через B обозначим мощность буфера рекордных точек;

— *слипание* двух ветвей k и s СП – это такая ситуация, когда найденные этими ветвями текущие аргументы функции цели достаточно мало отличаются друг от друга, то есть

$$|x_i^k - x_i^s| < \epsilon, \quad i \in 1:n, \tag{2}$$

где ϵ – достаточно малое число, являющееся параметром процесса поиска;

— количество ветвей СП – P; верхний индекс из $1:P$ будет обозначать номер ветви СП; через верхний индекс b будем обозначать номера векторов, принадлежащих БРТ (помещенных в процессе поиска);

— через x_{min}^p обозначим текущее рекордное значение вектора x ветви p, а через x_{min}^{bf} – лучший вектор x (обеспечивающий наименьшее значение целевой функции) среди всех помещенных в БРТ в процессе поиска минимума.

Описание алгоритма СП с ветвлением:

Шаг 1. Для всех p из $1:P$ моделируются значения вектора $x^p \in [0,1]^n$.

Шаг 2. Положим $p := 0$.

Шаг 3. Положим $p := p + 1$.

Шаг 4. Если $x^p \in I^p$ (I^p – эффективная область ВСП p), то:

– в случае $\Phi(x^p) < \Phi(x_{min}^p)$, ветвь с индексом p меняет свой текущий центр $x0^p$ в соответствии с вектором x^p и осуществляется переход к шагу 7;

– в случае $\Phi(x^p) > \Phi(x_{min}^p)$ осуществляется переход к шагу 7.

Шаг 5. Если существует такое s, что $x^p \in I^s$, $s \in 1:P$, $s \ne p$, и $\Phi(x^p) < \Phi(x_{min}^s)$, то ветвь с индексом s меняет свой текущий центр $x0^s$ в соответствии с вектором x^p и осуществляется переход к шагу 7.

Шаг 6. Если обнаруживается ситуация: $x^p \notin I^s$, $p, s \in 1 : P$, то вектор x^p_{min} помещается в буфер рекордных точек, а ветвь с индексом p меняет свой текущий центр $x0^p$ в соответствии с вектором x^p; осуществляется перехода к шагу 7.

Шаг 7. Если $p < P$ осуществляется переход на шаг 3.

Шаг 8. Для всех p из $1 : P$ (ветвей СП) проверяется факт слипания. В случае, если найдутся такие $s, k \in 1 : P$, $s \neq k$, что для них верно условие (2), выполняется:

– моделирование равномерно распределенных значений вектора $x' = x \in [0, 1]^n$;

– для ветви СП с индексом s (не нарушая общности будем считать, что $\Phi(x^p_{min}) < \Phi(x^s_{min})$) выполняется:

если $\Phi(x') < \Phi(x^b)$, $b \in 1 : B$, выполняется замена x^s на x';

если $\Phi(x') > \Phi(x^b)$, $b \in 1 : B$, выполняется замена x^s на x^{bf}_{min};

Шаг 9. Алгоритм завершает работу, если заданное количество вычислений целевой функции исчерпано, иначе – выполняется переход к шагу 2.

Некоторые комментарии и обоснования предложенного выше алгоритма.

Вполне логичны действия, выполняемые на шагах 4, 5, 6:

– если вектор x^p принадлежит эффективной области ветви СП p то достаточно, в случае необходимости, только сменить координаты центра перспективной области процесса СП p;

– если вектор x^p ветви СП принадлежит эффективной области ветви СП s, $s \neq p$, то, в случае необходимости, следует сменить координаты центра эффективной области СП s, иначе увеличивается вероятность слипания двух ветвей СП s и p;

– если вектор x^p не принадлежит ни одной из существующих эффективных областей, то выполняется "перенос"эффективной области этой ветви СП (меняется ее центр), а точка, с которой был выполнен переход, помещается в БРТ из тех рассуждений, что в случае необходимости процесс поиска минимума логичней продолжить именно с нее.

На восьмом шаге выполняется проверка на слипание ветвей СП и, в случае необходимости, выполняется возврат одной из ветви СП к вектору, взятому из БРТ, либо к вектору, смоделированному в $[0, 1]^n$ с равномерным законом распределения.

Далее перейдем к некоторым исследованиям описанного выше алгоритма на множестве, так называемых, тестовых функций [5].

Исследование алгоритма СП с ветвлением

Известно [5], что тестовые функции, выбираемые для проверки эффективности (исследования) того или иного способа оптимизации, моделируют различные классы реальных задач. Основная цель выбранных здесь целевых функций:

– показать сравнительную, с другими способами оптимизации, работу алгоритма СП с ветвлением;

– выявить классы задач, для которых эффективно использование СП с ветвлением.

В качестве критерия эффективности работы случайного поиска с ветвлением здесь выбрана вероятность нахождения искомого оптимума в зависимости от числа обращений к процедуре вычисления целевой функции.

Условимся, что Φ^* обозначает истинное минимальное значение функции цели. За оценку вероятности P сходимости СП к Φ^* выберем отношение числа случаев, в которых найденные значения переменных x^* целевой функции отличаются от оптимальных менее, чем на заданное $\varepsilon = 0.01$.

Показательную работу СП с ветвлением начнем с функции, принадлежащей к простому классу унимодальных функций.

<u>Функция 1.</u> $\Phi(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2 (x_1 + x_2 - 1)$,
$\Phi^*(0.4, 0.4) = -0.00512.$

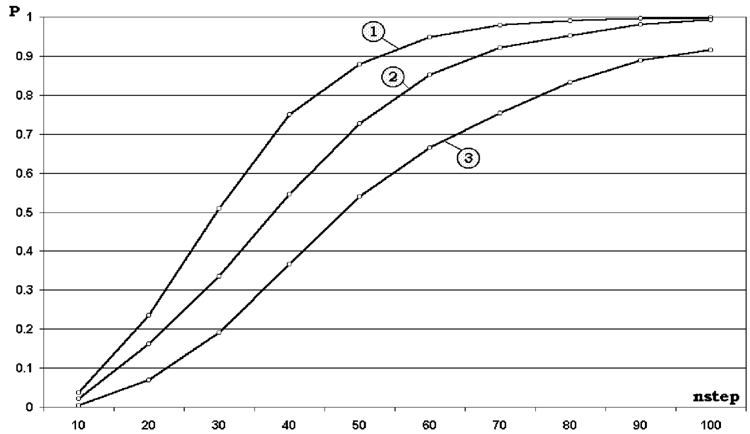

Рис.1. Показательная работа СП с ветвлением.

На рис. 1 представлены графики, показывающие сходимость разных способов организации случайного поиска для функции 1 в зависимости от числа обращений к вычислению функции цели. Кривая 1 соответствует результатам СП без ветвления (далее – обычный СП), кривая 2 – СП с ветвлением, а кривая 3 – алгоритму СП с ветвлением без выполнения шага 2 (отсутствие шага 2 в алгоритме означает, что обмена информацией между ВСП при нахождении минимума не происходит). Число ветвей при организации поиска в случае 2 и 3 равно двум. Из рис. 1 можно сделать следующие выводы:

– организация СП с ветвлением незначительно ухудшает сходимость процесса поиска;

– игнорирование шага 2 алгоритма с ветвлением ухудшает сходимость СП с ветвлением, за счет того, что некоторая часть полученной о целевой функции информации не учитывается в совместной работе ВСП.

Аналогичные результаты были получены на множестве других "простых" тестовых функций.

Далее перейдем к результатам оптимизации "сложных" функций, на которые алгоритм СП с ветвлением изначально и ориентировался.

<u>Функция 2.</u>

$$\Phi(x_1,\dots,x_{10}) = 10\sin^2(\pi z_1) + \sum_{i=1}^{9}\left((z_i-1)^2(1+10\sin^2(\pi z_{i+1}))\right) +$$
$$+(z_{10}-1)^2, \quad z_i = 1-(11-20x_i)/4, \quad i \in 1:10,$$
$$\Phi^*(0.55,\dots,0.55) = 0.$$

Функция 2 является многоэкстремальной функцией с числом локальных минимумов, равных 5^{10}. Результаты сравнительной работы обычного СП (кривая 1) и случайного поиска с ветвлением (кривые с номерами больше 1, причем нумерация кривой соответствует количеству ветвей СП) для этой функции представлены на рис. 2. Для полной ясности следует заметить очевидное – количество вычислений $nstep$ соответствует общему числу вычислений целевой функции для каждого способа организации поиска минимума.

Из рис. 2 можно сделать следующий вывод: каждому СП с ветвлением соответствует некоторое $nstep$, для которого обычный СП оказывается эффективней и, – $nstep$, для которого эффективней СП с ветвлением.

Это можно объяснить тем, что:

– количества вычислений, приходящихся на отдельный ВСП, недостаточно (относительно обычного СП) для исследования области, которую отдельный ВСП "для себя обозначил";

– общее количество вычислений целевой функции, приходящиеся на все ветви СП "не хватает" для необходимого уровня адаптации ветвей СП к области поиска.

Как только число вычислений целевой функции становится достаточным как для отдельной ветви СП, так и для всего процесса с ветвлением, последний начинает преобладать над обычным СП. При этом для СП с ветвлением вероятность нахождения глобального минимума P относительно быстро приближается к единице, тогда как для обычного СП при $nstep = 28000$ эта вероятность не превышает значения 0.9. Отметим, что именно такое число вычислений целевой функции понадобилось сделать для нахождения минимума функции 2 в работе [6].

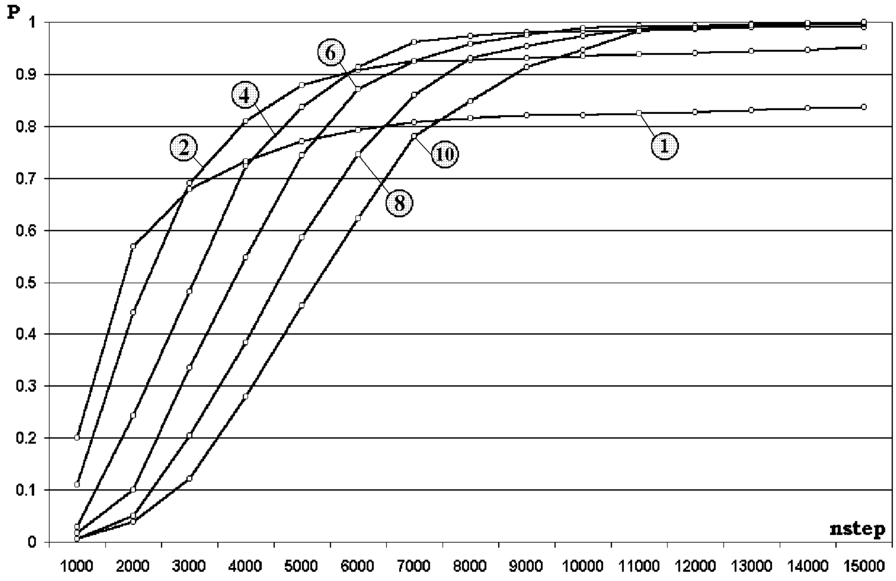

Рис. 2. Расчеты к тестовой функции 2.

"Перехлест" графиков обычного СП и СП с ветвлением, наблюдаемый на рис. 2 характерен для всех проведенных экспериментов. И чем больше количество ветвлений, тем позже наблюдается "перехлест" и тем быстрее график СП с ветвлением устремляется к 1. Подтверждение тому следующие расчеты.

Функция 3.

$$\Phi(x_1,\ldots,x_{10}) = \sin^2(3\pi y_1) + \sum_{i=1}^{9}\left((y_i-1)^2(1+\sin^2(3\pi y_{i+1}))\right) +$$
$$+(y_{10}-1)^2(1+sin^2(2\pi y_{10})), \quad y_i = -5+10x_i, \quad i \in 1:10,$$
$$\Phi^*(0.6,\ldots,0.6) = 0.$$

Функция 3 является также многоэкстремальной и имеет один глобальный и 15^{10} локальных минимумов.

На рис. 3 наблюдается аналогичный предыдущему "перехлест" графиков обычного СП и СП с ветвлением. Затраченное число шагов при этом меньше, чем в предыдущем случае, что объясняется более простым видом (с точки зрения этих способов оптимизации) целевой функции 3. Функция заимствована из статьи [6], в которой на нахождение минимального значения было затрачено 24689 ее вычислений.

Задача определения нескольких (или всех) глобальных экстремумов

Очень часто на практике встречаются случаи, когда целевая функция обладает не одним, а несколькими глобальными экстремумами, которые с практической точки зрения могут быть отнюдь не равнозначны между собой. Отсюда возникает задача нахождения всех или нескольких глобальных экстремумов. Обычно для решения таких задач используются генетические алгоритмы, что объясняется, прежде всего, их особенностями [4]. К сожалению, для генетических алгоритмов нам не известны соответствующие расчетные данные, которые можно было бы сравнить с результатами работы СП с ветвлением.

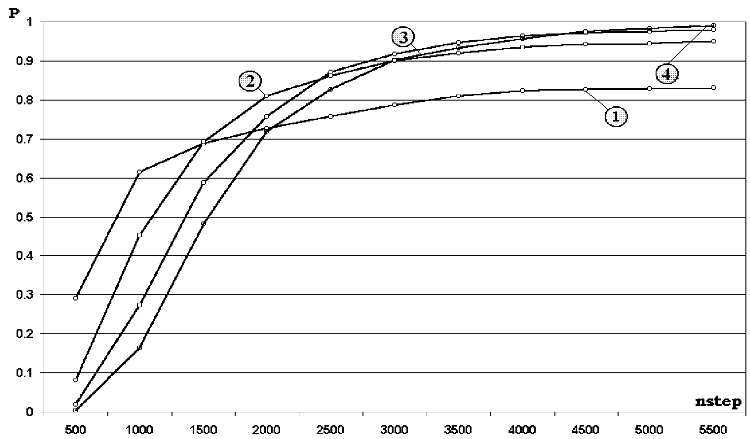

Рис. 3. Расчеты к тестовой функции 3.

Далее приведем результаты, связанные с определением всех глобальных экстремумов многоэкстремальной функции Растригина, имеющей следующий вид:

Функция 4. $\Phi(x_1, x_2) = y_1^2 + y_2^2 - 10\cos(2\pi y_1) - 10\cos(2\pi y_2),$
$y_1 = -5.12 + 10.24x_1, \quad y_2 = -5.12 + 10.24x_2,$
$\Phi^*(0.0583, 0.0583)) = \Phi^*(0.9417, 0.9417) =$
$= \Phi^*(0.0583, 0.9417) = \Phi^*(0.9417, 0.0583) = -49.278.$

Эта функция имеет в области поиска 96 локальных и 4 глобальных экстремума. При применении СП с числом ветвлений, равным количеству глобальных экстремумов, получены следующие результаты: вероятность определения всех четырех глобальных экстремумов с точностью $\varepsilon = 0.01$ равна 0.6, а вероятность определения трех из четырех уже – 0.95. При этом количество реализаций алгоритма (число вычислений функции цели) выбрано как минимально необходимое для нахождения одного глобального экстремума с вероятностью, близкой к 1, одной ветвью СП.

Заключение

Приведенный в этой работе алгоритм случайного поиска с ветвлением относительно эффективен на классе сложных тестовых функций.

Организация СП с ветвлением позволяет не только решать некоторые задачи оптимизации в явном виде (задачи для которых применяются генетические алгоритмы), но и экономит при этом машинное время, в основном за счет уменьшения количества вычислений целевой функции.

Алгоритм СП с ветвлением несомненно имеет большое практическое значение [1], а также содержит в себе богатый и еще не исследованный статистический материал.

Литература

1. *Сушков Ю.А.* Метод, алгоритм и программа случайного поиска // – Л. ВНИИТрансМаш, 1969. – 43 с.

2. *Сушков Ю.А.* Об одном способе организации случайного поиска // Исследование операций и статистическое моделирование. – Л. ЛГУ. 1972. Вып.1. – С. 180-185.

3. *Сушков Ю.А., Туртиа С.Б.* Случайный поиск в многокритериальных задачах // Тез. докл. научно-технической конференции по вероятностным методам и средствам. – Новгород. 1983. – С. 90.

[1]Алгоритм включен в технологию оптимизации ROOT (Red Organization of Optimization Technology, URL http://www.r-tech.narod.ru)

4. *Батищев Д.И., Исаев С.А.* Оптимизация многоэкстремальных функций с помощью генетических алгоритмов // Межвуз. сб."Высокие технологии в технике, медицине и образовании". Часть 3. – Воронеж, ВГТУ. 1997.

5. *Жиглявский А.А., Жилинскас А.Г.* Методы поиска глобального экстремума. – М., Наука, 1991. – 248 с.

6. *Kvasov D.E., Pizzuti C., Sergeyev Ya.D.* Local tuning and partition strategies for diagonal GO methods // Numerische Mathematik, 2003, 94(1). – P. 93-106.

On one modification of random search

A. Sh. Abakarov, Yu. A. Sushkhov

The work consider the problem description and the statistical tests of one way (method) of organization of random search. This method orient first of all to extreme finding of composite type of gully and multi-extreme functions. The numerical resultants of this method compare with other methods of optimum random search for some test functions.

