# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ КВАДРАТОВ ЭЛЕМЕНТОВ *S*-МАТРИЦЫ

**Л.Ж. Паланджянц, В.Б. Тлячев**

*Майкопский государственный технологический университет, г. Майкоп*

*Адыгейский государственный университет, г. Майкоп*

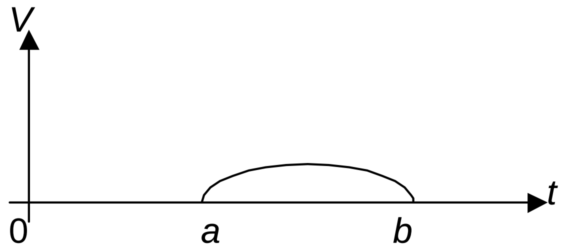
Рассматривается метод вычисления квадратов элементов S-матрицы с помощью теории мультипликативного интеграла и основных соотношений в сферическом треугольнике.

## 0. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Рассмотрим одномерное уравнение Шредингера

$$\Psi'' - V(t)\Psi = 0 \tag{01}$$

с потенциалом $V(t) = 0$, $t \notin (a,b)$.




Линейно независимые решения уравнения (1) вне интервала есть решения $\Psi'' = 0$, т.е. $\Psi_1 = 1$, $\Psi_2 = t$.

Если функцию *V(t)* аппроксимировать многоступенчатой функцией, являющейся постоянной на каждом интервале $\Delta t_k$ и претерпевающей скачок в точках $t_k$, то решение уравнения (01) в интервале задается линейной комбинацией решений $\Psi_1$ и $\Psi_2$. Матрица линейного преобразования решений есть

$$\overset{b}{\underset{a}{\int\!\!\!\!\frown}} E + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ V(t) & 0 \end{pmatrix} dt . \tag{02}$$

Мультипликативный интеграл (02), описывающий поведение волновой функции $\Psi(t)$ при изменении $t$, называется $S$ - матрицей.

В работах В.А. Колкунова и В.И. Ростокина [1,2] предлагается геометрический метод приближенного вычисления *S*-матрицы, представленной мультипликативным интегралом и устанавливается связь решения уравнения Шредингера со сферической геометрией.

Это значит, что вычисление *S*-матрицы одномерного уравнения Шредингера можно свести к суммированию бесконечно малых амплитуд, переходов отраженной и прошедшей волнами в бесконечно малом слое по правилам векторного сложения сферической геометрии.

В рассматриваемой задаче *S*-матрица – унимодулярная унитарная матрица второго порядка, поэтому ее можно параметризировать с помощью углов Эйлера $\varphi$, $\phi$ и $\psi$:

$$s = e^{-i\varphi\sigma_3} e^{-i\phi\sigma_1} e^{-i\psi\sigma_3} ,$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ - матрицы Паули.

Амплитуды состояний записываются через элементы $S$-матрицы:

$$a_1(t) = a_1(t_0)S_{11}(t_0,t) + a_2(t_0)S_{21}(t_0,t) = \cos\phi e^{i(\varphi+\psi)t};$$

$$a_2(t) = a_1(t_0)S_{12}(t_0,t) + a_2(t_0)S_{22}(t_0,t) = i\sin\phi e^{i(\varphi+\psi)t}.$$

Вероятность перехода из состояния 1 в состояние 2 в момент времени $t$ равна $\sin^2\Phi$. Следовательно, решение задачи о вычислении вероятности перехода между состояниями полностью определяется значением угла $\Phi$, для вычисления которого используется представление $S$-матрицы мультипликативным интегралом.

В работах [1-4] был предложен геометрический метод решения нестационарных задач квантовой механики на основе применения теории мультипликативного интеграла и частичного использования сферической геометрии [5-7].

Несмотря на то, что прошло достаточно много времени, применение теории мультипликативного интеграла в этом направлении практически не развивалось.

В данной статье предлагается способ вычисления S-матрицы методами сферической геометрии и мультипликативного интеграла. При этом используется стандартное представление S-матрицы унитарной унимодулярной матрицей второго порядка с помощью углов Эйлера. Однако непосредственное вычисление элементов S-матрицы наталкивается на некоторые трудности, в частности, с каждым приближением число слагаемых в элементах S-матрицы возрастает в геометрической прогрессии. Поэтому, используя определяющие соотношения в сферическом треугольнике, такие как теорема косинусов, формула произведения синуса стороны на косинус прилежащего угла и теорема синусов, построено представление группы унитарных унимодулярных матриц второго порядка в ортогональную группу матриц третьего порядка. Выход на сферические треугольники обеспечивает сопоставление произведению унитарных унимодулярных матриц второго порядка сумму геодезических векторов, задаваемых углами Эйлера на единичной сфере. Таким образом, произведение унитарных унимодулярных матриц второго порядка заменяется на произведение ортогональных матриц третьего порядка, что существенно облегчает вычисление элементов унимодулярных матриц второго порядка S-матрицы.

Далее с помощью мультипликативного интегрирования по частям удается построить приближение S-матрицы произведением произвольного числа унитарных унимодулярных матриц второго порядка. Определенным образом проведенное мультипликативное интегрирование по частям позволяет выделить циклический процесс, который упрощает процедуру приближения S-матрицы в виде произведения произвольного числа унитарных унимодулярных матриц второго порядка. Кроме того, удается в общем случае указанного приближения вычислить точное значение матричных элементов, что не представлялось возможным методами, указанными в работах [1-4].

### 1. Построение представления T : SU(2) → SO(3)

Пусть

$$S_k = e^{i\varphi_k\sigma_3}e^{i\Phi_k\sigma_1}e^{i\psi_k\sigma_3} \tag{1}$$

унитарная унимодулярная матрица второго порядка, где $\varphi_k$, $\Psi_k$, $\psi_k$ – углы Эйлера, $k$=1,2,…,$n$; $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ – матрицы Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Равенство (1) можно записать в виде

$$S_k = \begin{pmatrix} \cos\Phi_k e^{i(\varphi_k+\psi_k)} & i\sin\Phi_k e^{-i(\varphi_k-\psi_k)} \\ i\sin\Phi_k e^{i(\varphi_k-\psi_k)} & \cos\Phi_k e^{-i(\varphi_k+\psi_k)} \end{pmatrix} \in SU(2). \tag{2}$$

Произведению $S_kS_{k-1} = S_{(k-1)k}$ геодезических векторов ($2\varphi_{k-1}$, $2\Psi_{k-1}$, $2\psi_{k-1}$) и ($2\varphi_k$, $2\Psi_k$, $2\psi_k$) на единичной сфере (рис.1):

$$(2\varphi_{k-1}, 2\Psi_{k-1}, 2\psi_{k-1}) + (2\varphi_k, 2\Psi_k, 2\psi_k) = (2\varphi_{(k-1)k}, 2\Psi_{(k-1)k}, 2\psi_{(k-1)k}).$$

Рассмотрим произведение $S_{12\ldots n} = S_n S_{n-1} \ldots S_1$, где матрица $S_{12\ldots n}$ параметризована углами Эйлера $\varphi_{12\ldots n}$, $\Psi_{12\ldots n}$, $\psi_{12\ldots n}$.

Сформулируем задачу: Выразить квадраты модулей элементов матрицы $S_{12...n}$ через углы Эйлера $\varphi_k$, $\Psi_k$, $\psi_k$, k=1,2,…,n.

В виду очевидных соотношений $\sin^2\Phi = \frac{1}{2}(1-\cos 2\Phi), \cos^2\Phi = \frac{1}{2}(1+\cos 2\Phi)$ вычисление квадратов модулей элементов матрицы $S_{12...n}$ сводится к вычислению $\cos 2\Phi_{12...n}$.

Для решения этой задачи введем обозначения:

$$x_k = \cos 2\Phi_{12...k}, y_k = \sin 2\Phi_{12...k}\cos 2(\psi_{12...k} - \psi_k),$$
$$z_k = \sin 2\Phi_{12...k}\sin 2(\psi_{12...k} - \psi_k) \tag{3}$$

$$M_k = \begin{pmatrix} \cos 2\Phi_k & -\sin 2\Phi_k \cos 2(\psi_{k-1}+\varphi_k) & \sin 2\Phi_k \sin 2(\psi_{k-1}+\varphi_k) \\ \sin 2\Phi_k & \cos 2\Phi_k \cos 2(\psi_{k-1}+\varphi_k) & -\cos 2\Phi_k \sin 2(\psi_{k-1}+\varphi_k) \\ 0 & \sin 2(\psi_{k-1}+\varphi_k) & \cos 2(\psi_{k-1}+\varphi_k) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$M_n = \prod_{k=1}^{n} M_k \tag{5}$$

**Теорема 1**.

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = M_n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Доказательство. Построим представление T : SU(2) → SO(3), заданное матрицами (2) и (4). Рассмотрим $\Delta AA_{k-1}A_k$ (рис.1.)

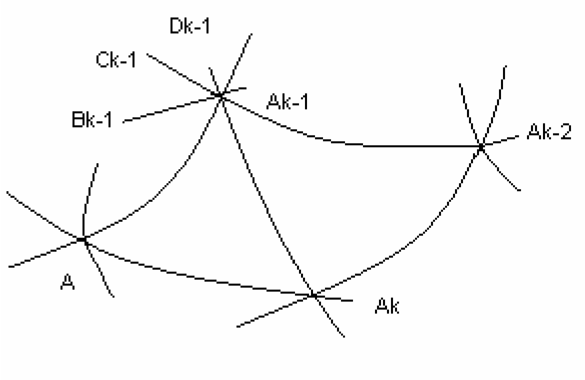



Рис.1.

$AA_k = 2\Phi_{12...k}$, $AA_{k-1} = 2\Phi_{12...(k-1)}$, $A_{k-1}A_k = 2\Phi_k$,

$$\angle C_{k-1}A_{k-1}B_{k-1} = 2\psi_{k-1}, \quad \angle B_{k-1}A_{k-1}A_k = 2\varphi_k, \quad \angle D_{k-1}A_{k-1}B_{k-1} = 2\psi_{12..(k-1)},$$
$$\angle A_{k-2}A_{k-1}A_k = \pi - 2(\psi_{k-1} - \varphi_k), \quad \angle AA_{k-1}A_k = \pi - 2(\psi_{k-1} + \varphi_k),$$
$$\angle AA_{k-1}A_{k-2} = 2(\psi_{12...(k-1)} - \psi_{k-1}).$$

По теореме косинусов (см., например, [8]) имеем:

$$\cos 2\Phi_{12...k} = \cos 2\Phi_{k-1}\cos 2\Phi_{12...(k-1)} -$$
$$-\sin 2\Phi_k \sin 2\Phi_{12...(k-1)}\cos 2(\psi_{12...(k-1)} + \varphi_k) \tag{7}$$

Учитывая, что $\psi_{12...(k-1)} + \varphi_k = (\psi_{12...(k-1)} - \psi_{k-1}) + (\psi_{k-1} + \varphi_k)$, равенство (7) запишется в виде:

$$\cos 2\Phi_{12...k} = \cos 2\Phi_{k-1}\cos 2\Phi_{12...(k-1)} -$$
$$-\sin 2\Phi_k \cos 2(\psi_{k-1}+\varphi_k)\sin 2\Phi_{12...(k-1)}\cos 2(\psi_{12...(k-1)} - \psi_k) + \tag{8}$$
$$+\sin 2\Phi_k \sin 2(\psi_{k-1}+\varphi_k)\sin 2\Phi_{12...(k-1)}\sin 2(\psi_{12...(k-1)} - \psi_k).$$

По формуле произведения синуса стороны на косинус прилежащего угла имеем:

$$\sin 2\Phi_{12...(k-1)} \cos 2(\psi_{12...(k-1)} - \psi_{k-1}) = \sin 2\Phi_{k-1} \cos 2\Phi_{12...(k-2)} +$$
$$+ \cos 2\Phi_{k-1} \sin 2\Phi_{12...(k-2)} \cos 2(\psi_{12...(k-2)} + \varphi_{k-1})$$

или

$$\begin{aligned} &\sin 2\Phi_{12...(k-1)} \cos 2(\psi_{12...(k-1)} - \psi_{k-1}) = \sin 2\Phi_{k-1} \cos 2\Phi_{12...(k-2)} + \\ &+ \cos 2\Phi_{k-1} \cos(\psi_{k-2} + \varphi_{k-1}) \sin 2\Phi_{12...(k-2)} \sin 2(\psi_{12...(k-2)} - \psi_{k-2}) - \\ &- \cos 2\Phi_{k-1} \sin 2(\psi_{k-2} + \varphi_{k-1}) \sin 2\Phi_{12...(k-2)} \sin 2(\psi_{12...(k-2)} - \psi_{k-2}). \end{aligned} \tag{9}$$

По теореме синусов имеем:

$$\sin 2\Phi_{12...(k-1)} \sin 2(\psi_{12...(k-1)} - \psi_{k-1}) = \sin 2\Phi_{12...(k-2)} \sin 2(\psi_{12...(k-2)} + \varphi_{k-1})$$

или

$$\begin{aligned} &\sin 2\Phi_{12...(k-1)} \sin 2(\psi_{12...(k-1)} - \psi_{k-1}) = \\ &= \sin 2(\psi_{k-2} + \varphi_{k-1}) \sin 2\Phi_{12...(k-1)} \cos 2(\psi_{12...(k-2)} - \psi_{k-2}) + \\ &+ \cos(\psi_{k-2} + \varphi_{k-1}) \sin 2\Phi_{12...(k-2)} \sin 2(\psi_{12...(k-2)} - \psi_{k-2}). \end{aligned} \tag{10}$$

С учетом обозначений (3), равенства (8), (9), (10) запишутся в виде:

$$\begin{cases} x_k = x_{k-1} \cos 2\Phi_k - y_{k-1} \sin 2\Phi_k \cos 2(\psi_{k-1} + \varphi_k) + z_k \sin 2\Phi_k \sin 2(\psi_{k-1} + \varphi_k) \\ y_k = x_{k-2} \sin 2\Phi_{k-1} + y_{k-2} \cos 2\Phi_{k-2} \cos 2(\psi_{k-2} + \varphi_{k-1}) + \\ + z_{k-2} \sin 2\Phi_{k-1} \sin 2(\psi_{k-2} + \varphi_{k-1}) \\ z_k = y_{k-2} \sin 2(\psi_{k-2} + \varphi_{k-1}) + z_{k-2} \cos 2(\psi_{k-1} + \varphi_k) \end{cases} \tag{11}$$

Уравнивая индексы в левой части (11) получаем систему разностных уравнений в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} = M_k \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \\ z_{k-1} \end{pmatrix} \tag{12}$$

Нетрудно убедиться в том, что $M_k \in SO(3)$. Решение системы (12) представится в виде

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = M_n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix},$$

где $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, откуда следует равенство (6). Теорема 1 доказана. Представление T : SU(2) → SO(3) построено и можно убедиться в том, что произведению $S_kS_{k-1}$ соответствует произведение $M_kM_{k-1}$.

Замечание. Кроме того, нетрудно посчитать, что

$$M_k = \begin{pmatrix} \cos 2\Phi_k & -\sin 2\Phi_k & 0 \\ \sin 2\Phi_k & \cos 2\Phi_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2(\psi_{k-1} + \varphi_k) & -\sin 2(\psi_{k-1} + \varphi_k) \\ 0 & \sin 2(\psi_{k-1} + \varphi_k) & \cos 2(\psi_{k-1} + \varphi_k) \end{pmatrix},$$

В предположении о том, что углы Эйлера являются гладкими функциями от $t \in [0, +\infty)$, можно посчитать мультипликативную производную

$$D_t M_k = M_k^{-1} M_k^{'},$$

$$D_t M_k = 2\begin{pmatrix} 0 & -\cos 2(\psi_{k-1}+\varphi_k)\Phi_k^{'} & \sin 2(\psi_{k-1}+\varphi_k)\Phi_k^{'} \\ \cos 2(\psi_{k-1}+\varphi_k)\Phi_k^{'} & 0 & -\Phi_k^{'} \\ -\sin 2(\psi_{k-1}+\varphi_k)\Phi_k^{'} & \Phi_k^{'} & 0 \end{pmatrix} \in SO(3).$$

**2. Мультипликативное интегрирование по частям.**

Пусть $P(t) = i\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ \overline{p}_{21} & -p_{22} \end{pmatrix}$, где $p_{mj} = p_{mj}(t)$ – гладкие функции от $t \in [0,+\infty)$, $m, j = 1,2$.

Разложим по P(t) базису матриц Паули:

$$P(t) = i(\theta_1\sigma_1 + \theta_2\sigma_2 + \theta_3\sigma_3),$$

где $\theta_1 = (p_{12} + \overline{p}_{12})/2, \theta_2 = (p_{12} - \overline{p}_{12})/2i, \theta_3 = p_{11}, \theta_k \in R, k = 1,2,3.$

Рассмотрим мультипликативный интеграл

$$S = \overset{\leftarrow}{\int} E + P(t)dt, \tag{13}$$

соответствующий дифференциальному уравнению

$S' = SP(t).$

Матрицу S, S(0)=E называют S-матрицей.

Укажем процесс мультипликативного интегрирования по частям, в результате которого интеграл (13) представится как произведение произвольного числа унитарных унимодулярных матриц второго порядка. Такие произведения называют приближением S-матрицы произведением унитарных унимодулярных матриц второго порядка.

Напомним формулу мультипликативного интегрирования по частям (13) [5-7]:

$$\overset{\leftarrow}{\int} E + P(t)dt = \overset{\leftarrow}{\int} E + C(P(t) - C^{-1}C')C^{-1}dt \cdot C,$$

где C = C(t) – неособая матрица второго порядка. Возьмем $C(t) = i\theta_3\sigma_3$. Тогда интеграл (13) запишется в виде

$$\overset{\leftarrow}{\int} E + P(t)dt = \overset{\leftarrow}{\int} E + i(\theta_{1,1}\sigma_1 + \theta_{2,1}\sigma_2)dt \cdot \exp(i\int \theta_3\sigma_3 dt), \tag{14}$$

где

$$\theta_{1,1} = \theta_1 \cos 2\int \theta_3 dt - \theta_2 \sin \int \theta_3 dt, \tag{15}$$

$$\theta_{2,1} = \theta_1 \sin 2\int \theta_3 dt + \theta_2 \cos \int \theta_3 dt \tag{16}$$

Продолжим интегрирование по частям, взяв $C(t) = i\theta_{1,1}\sigma_1$:

$$\overset{\leftarrow}{\int} E + i(\theta_{1,1}\sigma_1 + \theta_{2,1}\sigma_2)dt = \overset{\leftarrow}{\int} E + i(\theta_{2,2}\sigma_2 + \theta_{3,2}\sigma_3)dt \cdot \exp(i\int \theta_{1,1}\sigma_1 dt), \tag{17}$$

где

$$\theta_{2,2} = \theta_{2,1} \cos 2\int \theta_{1,1} dt, \tag{18}$$

$$\theta_{3,2} = \theta_{2,1} \sin 2\int \theta_{1,1} dt. \tag{19}$$

Теперь проинтегрируем еще раз, взяв $C(t) = i\theta_{3,2}\sigma_3$:

$$\overset{\leftarrow}{\int} E + i(\theta_{2,2}\sigma_2 + \theta_{3,2}\sigma_3)dt = \overset{\leftarrow}{\int} E + i(\theta_{1,3}\sigma_1 + \theta_{2,3}\sigma_2)dt \cdot \exp(i\int \theta_{3,2}\sigma_3 dt), \tag{20}$$

где

$$\theta_{1,3} = -\theta_{2,2} \sin 2\int \theta_{3,2} dt, \tag{21}$$

$$\theta_{2,3} = \theta_{2,2} \sin 2\int \theta_{3,2} dt. \tag{22}$$

Таким образом, из равенств (16), (19), (22), получаем

$$\overleftarrow{\int} E + P(t)dt = \overleftarrow{\int} E + i(\theta_{1,3}\sigma_1 + \theta_{2,3}\sigma_2)dt \cdot \exp(i\int \theta_{3,2}\sigma_3 dt)\exp(i\int \theta_{1,1}\sigma_1 dt)\exp(i\int \theta_3\sigma_3 dt).$$

На этом первый цикл интегрирования заканчивается, поскольку произведение

$$S_1 = \exp(i\int \theta_{3,2}\sigma_3 dt)\exp(i\int \theta_{1,1}\sigma_1 dt)\exp(i\int \theta_3\sigma_3 dt)$$

представляет собой унитарную унимодулярную матрицу второго порядка.

Оставшийся интеграл $\overleftarrow{\int} E + i(\theta_{1,2}\sigma_1 + \theta_{2,3}\sigma_2)dt$ имеет вид интеграла (17) и поэтому процесс интегрирования можно продолжить. Очевидно, что дальнейшее интегрирование $\overleftarrow{\int} E + i(\theta_{1,2}\sigma_1 + \theta_{2,3}\sigma_2)dt$ сводится к интегрированию $\overleftarrow{\int} E + i(\theta_{1,1}\sigma_1 + \theta_{2,1}\sigma_2)dt$ с той разницей, что вместо коэффициентов $\theta_{1,1}$ и $\theta_{2,1}$ будут $\theta_{1,3}$ и $\theta_{2,3}$, связь между которыми следует из равенств (20), (21), (23), (24):

$$\theta_{1,3} = -\theta_{2,1} \cos 2\int \theta_{1,1} dt \cdot \sin 2\int \theta_{3,2} dt,$$

$$\theta_{2,3} = \theta_{2,1} \cos 2\int \theta_{1,1} dt \cdot \cos 2\int \theta_{3,2} dt.$$

Дальнейшие вычисления показывают, что интеграл (13) запишется в виде бесконечного произведения

$$\overleftarrow{\int} E + P(t)dt = \prod_{k=0}^{\infty} \exp(i\int \theta_{1,2k+1}\sigma_1)\exp(i\int \theta_{3,2k}\sigma_3), \tag{24}$$

где

$$\theta_{1,2k+1} = -\theta_{2,2k-1} \cos 2\int \theta_{1,2k-1} dt \cdot \sin 2\int (\theta_{2,2k-1} \sin 2\int \theta_{1,2k-1} dt) dt,$$

$$\theta_{2,2k+1} = \theta_{2,2k-1} \cos 2\int \theta_{1,2k-1} dt \cdot \cos 2\int (\theta_{2,2k-1} \sin 2\int \theta_{1,2k-1} dt) dt,$$

$$\theta_{3,2k} = \theta_{2,2k-2} \cos 2\int \theta_{3,2k-2} dt \cdot \sin 2\int (\theta_{1,2k-1} dt) dt,\ \theta_{3,0} = \theta_3,\ k = 1,2,...n.$$

Отметим, что произведение 2n+1 матриц произведения (24) можно записать в виде произведения n троек матриц типа (23). При этом матрицы типа $\exp(i\int \theta_{3,2k}\sigma_3 dt),\ k = 2,...,n-1$ представляются в виде произведения двух равных множителей, что и обеспечивает указанное разложение:

$$S_1 = \exp(\frac{i}{2}\int \theta_{3,2}\sigma_3 dt)\exp(i\int \theta_{1,1}\sigma_1 dt)\exp(i\int \theta_3\sigma_3 dt),$$

$$S_k = \exp(\frac{i}{2}\int \theta_{3,2k}\sigma_3 dt)\exp(i\int \theta_{1,2k-1}\sigma_1 dt))\exp(\frac{i}{2}\int \theta_{3,2k-2}\sigma_3 dt)$$

$$S_n = \exp(i\int \theta_{3,2n}\sigma_3 dt)\exp(i\int \theta_{1,2n-1}\sigma_1 dt)\exp(\frac{i}{2}\int \theta_{3,2n-2}\sigma_3 dt).$$

Следовательно, интеграл (13) запишется в виде

$$\overleftarrow{\int} E+P(t)dt=\overleftarrow{\int} E+\begin{pmatrix}0 & -\overline{\omega}_{2n+1}\\ \omega_{2n+1} & 0\end{pmatrix}dt\cdot S_n S_{n-1}\cdots S_1, \qquad (25)$$

где

$$\omega_{2n+1}=\rho_{2n+1}\exp(2i\int\theta_{3,2n}dt),$$
$$\rho_{2n+1}=\rho_{2n-1}\cos 2\int\theta_{3,2n}dt\cos 2\int\theta_{1,2n-1}dt,$$
$$\rho_1=\theta_1\sin 2\int\theta_3 dt+\theta_2\cos 2\int\theta_3 dt)\cos 2\int\theta_{1,1}dt.$$

В приближенных вычислениях интеграл $\overleftarrow{\int} E+\begin{pmatrix}0 & -\overline{\omega}_{2n+1}\\ \omega_{2n+1} & 0\end{pmatrix}dt$ следует оценить, подобрав соответствующую унитарную унимодулярную матрицу второго порядка, а к полученному произведению (25) можно применить результаты теоремы 1.

### Литература

1. *Ростокин В.И., Колкунов В.А.* Асимптотические решения задачи о взаимодействии атома с внешним полем. /Физика газоразрядной плазмы. Сб.МИФИ под ред. Е.С.Трехова. – М.: Атомиздат, 1969. – В.2. – С. 31-52.
2. *Ростокин В.И., Колкунов В.А.* Асимптотические решения задачи о взаимодействии атома с внешним полем. /Физика газоразрядной плазмы. Сб.МИФИ под ред. Е.С. Трехова. – М.: Атомиздат, 1969. – В.2. – С. 53-61.
3. *Ростокин В.И.* К адиабатической теории возмущений. /Атомные столкновения. Сб. МИФИ под ред. Ю.А.Вдовина. – Атомиздат. – 1969. – С. 102-110.
4. *Ростокин В.И.* К теории S-матриц второго порядка. /Автореферат канд. диссер. – М., 1970. – 15 с.
5. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 1967. –576 с.
6. *Мантуров О.В.* Мультипликативный интеграл.// Проблемы геометрии, 1990.– Т.22. – С. 167-215.
7. *Паланджянц Л.Ж.* Геометрия мультипликативного интеграла. – Майкоп: Качество, 1997. – 94 с.
8. *Андронов И.К., Окунев А.К.* Курс тригонометрии. – М.: Просвещение, 1967. – 648 с.

## The geometric way calculation the quadrate elements of S-matrix

**L.G. Palandgyantz, V.B. Tlyachev**

The quadrate elements of the S-matrix are calculated with the help of the product integral theory and the basic expression in spherical triangle.