2003 г. **№8**

Т р у д ы   Ф О Р А

О РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ НЕ ИМЕЮЩИХ НЕТРИВИАЛЬНЫХ АБСОЛЮТНЫХ МОМЕНТОВ

Д.Е. Яковлев

Томский политехнический университет, г. Томск

В работе приводится пример случайной величины не имеющей нетривиальных абсолютных моментов. Существование такой случайной величины приведено в контексте проблемы равномерной сходимости функций распределения вероятности. Также в работе приведены несколько примеров последовательностей случайных величин с необычными свойствами как их членов, так и предельного распределения. Эти примеры представляют самостоятельный интерес для специалистов.

Введение

В настоящее время методология исследования стохастических систем в экономике, физике и других науках во многом опирается на статистические оценки функций от исследуемой величины (квадратичная, логарифмическая, тождественно равная аргументу и т.д.). Причем конкретное вычисление данных оценок предполагает использование эмпирической функции распределения вероятности (ф.р.в.). В качестве теоретического обоснования использования эмпирической ф.р.в. принимается теорема Гливенко-Кантелли о равномерной сходимости экспериментальной ф.р.в. [3]:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\Re} |F_n^*(x) - F(x)| = 0. \tag{1}$$

здесь $F_n^*(x)$ и $F(x)$ -эмпирическая и истинная ф.р.в. соответственно. Исследователи-практики считают это утверждение достаточным аргументом, чтобы заменять в расчетах истинную ф.р.в. эмпирической. Основным результатом представляемой работы является построение случайной величины (как предела последовательности сл. величин), у которой неинтегрируема ни одна (даже дробная) степень ее абсолютной величины, т.е. $E[|\eta|^a] = \infty$ при $\forall a \neq 0$. В контексте проблемы отсутствия нетривиальных абсолютных моментов показано, что наличие равномерной сходимости ф.р.в. не обеспечивает сохранение таких свойств сл.вел. как наличие или отсутствие моментов у предельного распределения. С практической точки зрения данный факт можно рассматривать как требование от экспериментатора более глубокого исследования вопроса применимости основных статистических методов при анализе результатов опыта. В работе приведен пример такой последовательности сл.вел. (со сходимостью в смысле равномерной сходимости ф.р.в.), что любые степени их членов интегрируемы, в то время как у предельного распределения отсутствуют нетривиальные абсолютные моменты. Также построен пример зеркально противоположный данному.

Основная часть

Определим систему замкнутых непересекающихся интервалов следующим образом:

$$\{\chi_k\}_{k=1}^{\infty}, \chi_k = [e^k, e^k + \frac{1}{k}], \chi_i \cap \chi_j = \oslash, i \neq j. \tag{2}$$

Совокупность данных интервалов определяет последовательность $\{F_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ ф.р.в. случайных величин равномерно распределенных на χ_k. Наряду с $\{F_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ рассмотрим последовательность ф.р.в. $\{T_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$T_n(x) = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}} \sum_{k=1}^{n} \frac{F_k(x)}{k^2} \tag{3}$$

Нетрудно проверить, что так определенные функции $\{T_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяют аксиомам ф.р.в. [2] и являются функциями распределения вероятности некоторых сл.вел. [2]. Покажем, что последовательность $\{T_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится к функции $F(x) = \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_k(x)}{k^2}$ (очевидно, являющейся ф.р.в. некоторой сл.вел.). Действительно, учтя неравенство
$0 \le F_k(x) \le 1$, имеем:

$$|F(x) - T_n(x)| = \left| \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_k(x)}{k^2} - \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}} \sum_{k=1}^{n} \frac{F_k(x)}{k^2} \right| \le$$

$$\le \left| \frac{6}{\pi^2} - \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}} \right| \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{F_k(x)}{k^2} + \frac{6}{\pi^2} \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{F_k(x)}{k^2} \le \left| 1 - \frac{\frac{\pi^2}{6}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}} \right| + \frac{6}{\pi^2} \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Теперь доказываемое утверждение становится очевидным:

$$\sup_{x \in \Re} |F(x) - T_n(x)| \to 0, n \to \infty \tag{4}$$

Покажем, что случайная величина ξ , которой отвечает ф.р.в. F(x) , не имеет положительных абсолютных моментов. В самом деле (используя свойства интеграла Лебега [1]),

$$\int_{\Re} |x|^a dF(x) = \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Re} |x|^a dF_k(x) = \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \int_{\chi_k} |x|^a dF_k(x) \ge \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e^{ak} \int_{\chi_k} 1dx = \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} e^{ak}$$

Расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} e^{ak} = \infty$ при $a > 0$ доказывает это положение. Очевидно, что для ξ существует функция плотности распределения вероятности (ф.п.р.в.) определяемая равенством:

$$p_1(x) = \tfrac{6}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} I_{\chi_k}(x) \tag{5}$$

Здесь $I_A(x)$ индикатор множества A . Положим

$$p_2(x) = \tfrac{1}{x^2} p_1(\tfrac{1}{x}) \tag{6}$$

Очевидно, что $p_2(x)$ является ф.п.р.в. некоторой сл.вел. Для $p_2(x)$ будет верно:

$$\int_{\Re} |x|^{-a} p_2(x) dx = \int_0^{\infty} x^{-a-2} p_1(\frac{1}{x}) dx = \int_0^{\infty} y^a p_1(y) dy = \infty \tag{7}$$

Как показано в [4] функция

$$p(x) = \frac{1}{2} p_1(x) + \frac{1}{2} p_2(x) \tag{8}$$

также ф.п.р.в. некоторой сл.вел. (для определенности обозначим ец η). Учитывая полученные выше результаты, имеем: $E[|\eta|^z] = \int\limits_{\Re} |x|^z p_2(x)dx = \infty, \mathbf{Re}z \neq 0$. Как видно, предельная случайная величина η не имеет нетривиальных абсолютных моментов. В то же время, несложно показать (проведя построение аналогичное (4), (7), (9)), что ф.р.в.η , т.е. $P(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt$, является пределом равномерно сходящейся последовательности ф.р.в. $\{P_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$, таких, что $\{P_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ при любом комплексном z. Заметим, что в данном случае распределение с ф.р.в. $P(x)$ не имеет моду (точнее имеет бесконечную моду). Этот факт сразу показывает невозможность исследовать такого рода распределения оценивая значения сл. величин их модами, как это предложено применительно к вопросам рискологии в работе [5]. Итак, нами получен результат, показывающий, что свойство существования абсолютных моментов не переносится на предельную сл.вел., если рассматривается равномерная сходимость ф.р.в. Покажем теперь, что возможен и противоположный случай. Пусть числа a_n, b_n таковы, что $a_n, b_n > 0, a_n + b_n = 1$ и $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Далее, пусть $K_n(x) = a_n P(x) + b_n Q(x)$, где $Q(x)$ - ф.р.в. равномерного на отрезке распределения. Согласно [4], все $K_n(x)$ являются ф.р.в. случайных величин. Очевидно, что $K_n(x) \to Q(x)$ в смысле равномерной сходимости на всей числовой прямой. Наличие в определении $K_n(x)$ члена $P(x)$ позволяет утверждать об отсутствии всех нетривиальных абсолютных моментов. В то же время предельная функция $Q(x)$ имеет все (как положительные, так и отрицательные) абсолютные моменты. В заключение покажем, что каждому замкнутому интервалу $[a, b]$ можно сопоставить в соответствие некоторую случайную величину, которая имеет следующие абсолютные моменты и только их: $E[|\eta|^z] < \infty, \mathbf{Re}z \in [a, b], b \geq a$. Действительно, рассмотрим однопараметрическое семейство ф.п.р.в.:

$$p(x,t) = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \cdot e^{b\cdot k\cdot t}}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_{\chi_k}}{k^2 e^{b\cdot k\cdot t}} \tag{9}$$

Методами, аналогичными изложенным выше, несложно показать, что функция $P(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} (\frac{1}{2}p(x,b) + \frac{1}{2\cdot x^2}p(\frac{1}{x}, a))dx$ является ф.р.в. распределения, у которого существуют следующие абсолютные моменты $E[|\eta|^z] < \infty, \mathbf{Re}z \in [a, b], b \geq a$ и только они.

Литература

1. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976.

2. *Лоэв М.* Теория вероятностей. – М.: Издательство иностранной литературы, 1962.

3. *Уилкс С.* Математическая статистика. – М.: Наука, 1967.

4. *Лукач Е.* Характеристические функции. – М.: Наука, 1979.

5. *Витлинский В.В.* Проблемы количественного измерения риска// Труды международной конференции "Моделирование и анализ безопасности и риска-2003", Санкт-Петербург, 2003.

About distributions that have trivial absolute moments only

D.E. Yakovlev

In the present paper a stochastic magnitude that has trivial absolute moments only is shown, i.e. the variate η such that $E[|\eta|^a] = \infty$ for $\forall a \neq 0$ is constructed. The existence of such magnitude is considered in context of uniform convergence problem of distribution functions. Also in this article some important examples that show unusual properties of consequence of probability distributions and limiting distribution are proposed. These examples are of interest of specialists in probability theory.

