

О НЕРАЗЛОЖИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ПРОСТОЙ ТРЕХМЕРНОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ

О.К. Тен, А.В. Щеглова

Кубанский государственный университет, г. Краснодар

Получены явные формулы новой реализации неразложимых представлений серии Φ алгебры Ли $sl(2)$ над алгебраически замкнутым полем характеристики p и исследуются основные свойства подалгебр Картана супералгебр Ли над полем характеристики $p \neq 2$.

На сегодняшний день простая трехмерная алгебра Ли $sl(2)$ является единственной простой модулярной алгеброй Ли, для которой полностью известно описание ее ограниченных представлений. Описание ее неразложимых неограниченных представлений до сих пор не получено. Во многих случаях других простых алгебр Ли не имеется описания уже и неприводимых представлений.

Описание неприводимых представлений алгебры $sl(2)$ было получено А. Н. Рудаковым и И. Р. Шафаревичем в работе [1]. Позднее в работах [2, 3] были описаны неразложимые ограниченные представления в терминах представлений колчана Кронекера–Вейерштрасса. Оставшийся открытым вопрос о реализации неразложимых представлений алгебры $sl(2)$ был изучен в работе [5] А. А. Премета.

Давно замечено, что задача описания представлений модулярных алгебр Ли во многом сходна с задачей описания представлений квантовых групп. В 1994 году В. Чари и А. А. Премета в работе [6] удалось дать описание представлений квантовой группы $U_q(sl(2))$, не выходя за рамки линейной алгебры и теории алгебр, и не прибегая к соображениям теории алгебраических групп и понятию опорного многообразия для модулей над ограниченными алгебрами Ли, использовавшихся в случае алгебры $sl(2)$. В настоящей работе дается описание новой реализации неразложимых представлений серии Φ (в обозначениях [5]) алгебры Ли $sl(2)$. При этом по существу мы специализируем подход Чари В. и Премета А. А., использованный при классификации представлений $U_q(sl(2))$, на случай модулярных алгебр Ли.

1. Пусть K — алгебраически замкнутое поле характеристики $p > 2$ и

$$L = \langle h, e, f \mid [h, e] = 2e, [h, f] = -2f, [e, f] = h \rangle -$$

— простая трехмерная алгебра Ли $sl(2)$, наделенная p -отображением $e^{[p]} = 0, f^{[p]} = 0, h^{[p]} = h$. Пусть $U(L)$ — универсальная обертывающая алгебра и $u(L) = U(L)/(e^p, f^p, h^p - h)$ — u -алгебра размерности p^3 . Задача описания ограниченных представлений алгебры L эквивалентна задаче описания представлений u -алгебры $u(L)$ [8]. В случае алгебраически замкнутого поля нулевой характеристики все представления алгебры L являются вполне приводимыми и неприводимые модули есть в точности модули Вейля $V(m), m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ размерности $m + 1$. Действие алгебры L на базисе v_0, v_1, \dots, v_m модуля $V(m)$ определено следующим образом:

$$\begin{aligned} h \cdot v_i &= (m - 2i) v_i, i = 0, 1, \dots, m; \\ e \cdot v_i &= (m - i + 1) v_{i-1}, i = 1, 2, \dots, m; \quad e \cdot v_0 = 0; \\ f \cdot v_i &= (i + 1) v_{i+1}, i = 0, 1, \dots, m - 1; \quad f \cdot v_m = 0. \end{aligned}$$

В случае поля положительной характеристики ограниченные неприводимые модули являются редукциями $V(m), m = 0, 1, \dots, p - 1$ по модулю p . Редукции $V(m), m \in \mathbb{N}_0$ также называются модулями Вейля. Известно, что при $m > p, m + 1 \not\equiv 0 \pmod{p}$ модули $V(m)$ неразложимы и $V(m) = n V(p - 1)$, если $m + 1 = np$ (см. [5]).

По теореме Берксона [7] алгебра $u(L)$ является фробениусовой. Поэтому все проективные неразложимые L -модули являются инъективными и, следовательно, однозначно определяются своими неприводимыми соколями. Проективные неразложимые L -модули реализуются как модули $Q(l)$, $0 \leq l \leq p-2$ размерности $2p$ и $Q(p-1) = V(p-1)$ (сок $Q(l) = V(l)$). Действие алгебры L на базисе

$$v_i, w_j, 0 \leq i \leq 2p-l-2, p-l-1 \leq j \leq p-1$$

модуля $Q(l)$ ($0 \leq l \leq p-2$) определено следующим образом:

$$\begin{aligned} h \cdot v_i &= (m-2i)v_i, 0 \leq i \leq m; \\ e \cdot v_i &= (m-i+1)v_{i-1}, 1 \leq i \leq m; \quad e \cdot v_0 = 0; \\ f \cdot v_i &= (i+1)v_{i+1}, 0 \leq i \leq m-1; \quad f \cdot v_m = 0; \\ h \cdot w_i &= (2i-m)w_i, 0 \leq i \leq m; \\ e \cdot w_i &= (i+1)w_{i+1} + \frac{1}{m-i}v_{i+1}, p-l-1 \leq i \leq p-2; \quad e \cdot w_{p-1} = \frac{1}{m+1}v_p; \\ f \cdot w_i &= (m-i+1)w_{i-1}, p-l \leq i \leq p-1; \quad f \cdot w_{p-l-1} = \frac{1}{p-l-1}v_{p-l-2}, \end{aligned}$$

где $m = 2p-l-2$, $w_{p-l-2} = w_p = 0$ ([4, 5]).

В работе [2] Рудаков А. Н. показал, что описание неразложимых представлений алгебры L , не являющихся проективными, сводится к описанию неразложимых представлений колчана Кронекера–Вейерштрасса, состоящего из двух вершин и двух стрелочек, направленных из первой вершины во вторую. Опишем эту редукцию более точно. Всякий центральный элемент из $u(L)$ имеет на неразложимом модуле единственное собственное значение. В частности, оператор Казимира $\Gamma = \frac{1}{4}(h+1)^2 + fe$ на неразложимом модуле V имеет единственное собственное значение $k \in \{0, 1, \dots, \frac{p-1}{2}\}$ [2]. Пусть тогда

$$\begin{aligned} V_i &= \{v \in V \mid h \cdot v = i v\}, i \in \mathbb{Z}_p; \\ \check{e} &= e|_{V_{k-1}}, \quad \check{f} = f^{p-1}|_{V_{k-1}}; \\ \hat{e} &= e^{p-1}|_{V_{k+1}}, \quad \hat{f} = f|_{V_{k+1}}. \end{aligned}$$

Следуя [6], пару линейных отображений $\alpha, \beta : U \rightarrow W$ назовем неразложимой, если она определяет неразложимое представление колчана Кронекера–Вейерштрасса. Договоримся рассматривать пару линейных отображений $\alpha, \beta : U \rightarrow W$ как представитель класса изоморфных представлений колчана Кронекера–Вейерштрасса. Тогда, если модуль V не проективен, то $\Gamma_V = k \cdot 1_V$, $k \in \{1, \dots, \frac{p-1}{2}\}$ и либо $\check{e} = \check{f} = 0$ и V с точностью до изоморфизма определяется неразложимой парой линейных отображений \hat{e}, \hat{f} , либо, наоборот, $\hat{e} = \hat{f} = 0$ и V определяется неразложимой парой линейных отображений \check{e}, \check{f} . Преметом А. А. в [5] показано, что если размерности пространств $V_{k\pm 1}$ различны, то неразложимый модуль V изоморфен $V(m)$, либо двойственному модулю $V(m)^*$ для некоторого m , а в случае, если размерности пространств $V_{k\pm 1}$ совпадают, то V изоморфен одному из максимальных подмодулей модуля Вейля, обозначенных в [5] как $\Phi_\xi(d)$.

В следующем пункте мы построим новую реализацию представлений $\Phi_\xi(d)$ алгебры Ли $sl(2)$.

2. Пусть $A \in \text{End } K^n$, $1 \leq k \leq p-1$ и пусть v_0, v_1, \dots, v_{p-1} — базис K^p , причем индексы будем рассматривать по модулю p : $v_{-1} = v_{p-1}$. Определим действие $u(L)$ на $K^p \otimes K^n$ следующим образом:

$$\begin{aligned} h \cdot (v_i \otimes w) &= (k-1-2i)v_i \otimes w, 0 \leq i \leq p-1; \\ f \cdot (v_i \otimes w) &= (i+1)v_{i+1} \otimes w, 0 \leq i \leq p-2; \quad f \cdot (v_{p-1} \otimes w) = 0; \\ e \cdot (v_i \otimes w) &= (k-i)v_{i-1} \otimes w, 1 \leq i \leq p-1; \quad e \cdot (v_0 \otimes w) = v_{p-1} \otimes Aw, \end{aligned}$$

где $w \in K^n$.

Эти соотношения задают на $K^p \otimes K^n$ структуру модуля. Действительно:

$$\begin{aligned} hf \cdot (v_i \otimes w) &= (i+1)(k-1-2(i+1))v_{i+1} \otimes w = \\ &= (k-1-2i)(i+1)v_{i+1} \otimes w - 2(i+1)v_{i+1} \otimes w = \\ &= (fh-2f) \cdot (v_i \otimes w); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} he \cdot (v_i \otimes w) &= (k-i)(k-1-2(i-1))v_{i-1} \otimes w = \\ &= (k-1-2i)(k-i)v_{i-1} \otimes w + 2(k-i)v_{i-1} \otimes w = \\ &= (eh+2e) \cdot (v_i \otimes w), \text{ если } i \neq 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} he \cdot (v_0 \otimes w) &= (k-i)(k-1-2(p-1))v_{p-1} \otimes Aw = \\ &= (k-1)v_{p-1} \otimes Aw + 2v_{p-1} \otimes Aw = \\ &= (eh+2e) \cdot (v_0 \otimes w); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ef \cdot (v_i \otimes w) &= (i+1)(k-(i+1))v_i \otimes w = \\ &= (k-i)v_i \otimes w + (k-1-2i)v_i \otimes w = \\ &= (fe+h) \cdot (v_i \otimes w), \text{ если } i \neq 0; \end{aligned}$$

$$ef \cdot (v_0 \otimes w) = (k-1)v_0 \otimes w = (fe+h) \cdot (v_0 \otimes w).$$

Обозначим таким образом определенный модуль $V(A, n, k)$.

Предложение 1. 1) Модуль $V(A, n, k)$ неразложим тогда и только тогда, когда K^n неразложим как A -модуль.

2) Модули $V(A, n, k)$ и $V(B, n, k)$ изоморфны тогда и только тогда, когда A и B сопряжены.

3) Модуль $V(A, n, k)^*$ изоморфен $V(-A, n, -k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Из структуры модуля $V(A, n, k)$ очевидно, что единственно возможное разложение $V(A, n, k)$ имеет вид:

$$V(A, n, k) \cong K^p \otimes U \oplus K^p \otimes V,$$

где $K^n \cong U \oplus V$ — прямая сумма подпространств U и V , инвариантных относительно A . Таким образом, неразложимость $V(A, n, k)$ эквивалентна неразложимости K^n относительно A .

2) Пусть A, B сопряжены и $B = CAC^{-1}$. Тогда $1 \otimes C$ есть изоморфизм модуля $V(A, n, k)$ и $V(B, n, k)$. Обратное, непосредственно проверяется, что всякий L -изоморфизм имеет вид $1 \otimes C$ для некоторого $C \in \text{End } K^n$, и, в частности, имеет место равенство: $B = CAC^{-1}$.

3) Пусть w_1, \dots, w_n — базис K^n и (a_j^s) — матрица A относительно этого базиса. Тогда, полагая, что $u_{ij} = u_i \otimes w_j$, получаем, что

$$\begin{aligned} h \cdot u_{ij} &= (k-1-2i)u_{ij}; \\ f \cdot u_{ij} &= (i+1)u_{i+1,j}; \\ e \cdot u_{ij} &= (k-i)u_{i-1,j}, \text{ если } i \neq 0; \\ e \cdot u_{0j} &= \sum_{s=1}^n \alpha_j^s u_{p-1,s}, \end{aligned}$$

где индекс i рассматривается по модулю p и $0 \leq i \leq p-1, 1 \leq j \leq n$. Пусть $u_{ij}^*, 0 \leq i \leq p-1, 1 \leq j \leq n$ — базис $V(A, n, k)^*$, двойственный u_{ij} . Положим, что $v_{ij} = u_{p-1-i,j}^*$. Тогда

непосредственные вычисления показывают, что имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} h \cdot v_{ij} &= (-k - 1 - 2i) v_{ij}; \\ f \cdot v_{ij} &= (i + 1) v_{i+1,j}; \\ e \cdot v_{ij} &= (-k - i) v_{i-1,j}, \text{ если } i \neq 0; \\ e \cdot v_{0j} &= - \sum_{s=1}^n \alpha_s^j v_{p-1,s}, \end{aligned}$$

где $0 \leq i \leq p - 1, 1 \leq j \leq n$. Из этих соотношений видим, что $V(A, n, k)^* \cong V(-A^T, n, -k)$. Остается заметить, что A и A^T сопряжены. \square

Пусть A — жорданова клетка с собственными значениями λ , тогда положим $V(\lambda, n, k) = V(A, n, k)$. Структура модуля $V(\lambda, n, k)$ в базисе, отмеченном в доказательстве предложения 1, задается следующим образом:

$$\begin{aligned} h \cdot u_{ij} &= (k - 1 - 2i) u_{ij}; \\ f \cdot u_{ij} &= (i + 1) u_{i+1,j}; \\ e \cdot u_{ij} &= (k - i) u_{i-1,j}, \text{ если } i \neq 0; \\ e \cdot u_{0j} &= \lambda u_{p-1,j} + u_{p-1,j-1}, \text{ если } j > 1; \\ e \cdot u_{01} &= \lambda u_{p-1,1}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $0 \leq i \leq p - 1, 1 \leq j \leq n$.

Пусть $V(\lambda, n, k)^\omega$ — модуль, полученный подкручиванием модульной структуры на $V(\lambda, n, k)$ с помощью инволюции Картана $h \mapsto -h, f \mapsto e, e \mapsto f$. Непосредственные вычисления показывают, что в базисе $v_{ij} = u_{k-1-i,j}$ структура модуля $V(\lambda, n, k)^\omega$ задается следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} h \cdot v_{ij} &= (k - 1 - 2i) v_{ij}; \\ f \cdot v_{ij} &= (i + 1) v_{i+1,j}, \text{ если } i \neq k - 1; \\ f \cdot v_{k-1,j} &= \lambda v_{p-1,j} + v_{p-1,j-1}, \text{ если } j > 1; \\ f \cdot v_{k-1,1} &= \lambda v_{p-1,1}; \\ e \cdot v_{ij} &= (k - i) v_{i-1,j}, \end{aligned} \tag{2}$$

где $0 \leq i \leq p - 1, 1 \leq j \leq n$.

Предложение 2. *Модуль $V(\lambda, n, k)^\omega$ изоморфен модулю $V(\lambda', n', k')$ тогда и только тогда, когда $n = n', k = k', \lambda\lambda' = k^2$.*

Доказательство. Равенство $n = n'$ очевидно из сравнения размерностей. Равенство $k = k'$ следует из сравнения весов относительно h векторов старших относительно f . Докажем, что модули $V(\lambda, n, k)^\omega$ и $V(\lambda', n, k)$ изоморфны тогда и только тогда, когда $\lambda\lambda' = k^2$.

Пусть $\theta: V(\lambda', n, k) \rightarrow V(\lambda, n, k)^\omega$ изоморфизм $sl(2)$ -модулей. Будем считать, что структуры модулей $V(\lambda', n, k)$ и $V(\lambda, n, k)^\omega$ описываются соответственно соотношениями (1) с λ' вместо λ и (2).

Образ элемента u_{ij} , как собственного вектора $h_{V(\lambda', n, k)}$, отвечающего собственному значению $k - 1 - 2i$, должен лежать в собственном подпространстве $h_{V(\lambda, n, k)^\omega}$, соответствующем собственному значению $k - 1 - 2i$. Поэтому мы можем положить, что

$$\theta(u_{ij}) = \sum_{s=1}^n \alpha_{ij}^s v_{is}, 0 \leq i \leq p - 1, 1 \leq j \leq n, \tag{3}$$

для некоторых $\alpha_{ij}^s \in K$. Расписывая равенства $\theta(e \cdot u_{ij}) = e \cdot \theta(u_{ij})$, $\theta(f \cdot u_{ij}) = f \cdot \theta(u_{ij})$, получаем следующие условия того, что биективное отображение (3) является изоморфизмом модулей:

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}^s &= \alpha_{i-1,j}^s, i \neq 0, k; \\ k\alpha_{0j}^s &= \lambda' \alpha_{p-1,j}^s + \alpha_{p-1,j-1}^s, \text{ если } j > 1; \\ k\alpha_{01}^s &= \lambda' \alpha_{p-1,1}^s; \\ k\alpha_{kj}^s &= \lambda \alpha_{k-1,j}^s + \alpha_{k-1,j}^{s+1}, \text{ если } s < n; \\ k\alpha_{kj}^n &= \lambda \alpha_{k-1,j}^n. \end{aligned} \quad (4)$$

Из равенств $\alpha_{ij}^s = \alpha_{i-1,j}^s, i \neq 0, k$ следует, что мы можем положить, что

$$\alpha_{0j}^s = \alpha_{1j}^s = \dots = \alpha_{k-1,j}^s = \alpha_j^s, \quad \alpha_{kj}^s = \alpha_{k+1,j}^s = \dots = \alpha_{p-1,j}^s = \beta_j^s.$$

Тогда соотношения (4) примут вид:

$$k\alpha_j^s = \lambda' \beta_j^s + \beta_{j-1}^s, \text{ если } j > 1; \quad (5)$$

$$k\alpha_1^s = \lambda' \beta_1^s; \quad (6)$$

$$k\beta_j^s = \lambda \alpha_j^s + \alpha_j^{s+1}, \text{ если } s < n; \quad (7)$$

$$k\beta_j^n = \lambda \alpha_j^n. \quad (8)$$

Из соотношений (6) и (8) получаем: $k^2 \alpha_1^n = \lambda' k \beta_1^n = \lambda \lambda' \alpha_1^n$. Поэтому, если $k^2 \neq \lambda \lambda'$, то $\alpha_1^n = 0$, откуда из (7) следует, что $\alpha_1^n = \alpha_1^{n-1} = \dots = \alpha_1^1 = 0$ и $\theta(u_{01}) = \sum_{s=1}^n \alpha_{01}^s v_{0s} = \sum_{s=1}^n \alpha_1^s v_{0s} = 0$, что противоречит биективности θ . Таким образом, существование изоморфизма θ возможно только при условии $k^2 = \lambda \lambda'$. В этом случае из соотношений (5–8) получаем, что параметры β_j^s выражаются через параметры α_j^s : $\beta_j^s = \lambda k^{-1} \alpha_j^s + k^{-1} \alpha_j^{s+1}, s < n$; $\beta_j^n = \lambda k^{-1} \alpha_j^n$, и существование изоморфизма θ эквивалентно существованию невырожденной матрицы (α_j^s) такой, что

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 &= \alpha_1^3 = \dots = \alpha_1^n = 0; \\ \alpha_1^n &= \alpha_2^n = \dots = \alpha_{n-1}^n = 0; \\ \alpha_j^s &= -\lambda' \lambda^{-1} \alpha_{j+1}^{s+1} - \lambda^{-1} \alpha_j^{s+1}, \end{aligned}$$

где $0 \leq j \leq p-2, 1 \leq s \leq n-1$. Существование такой матрицы проверяется непосредственно очевидным образом. □

В частности, имеет место следующее

Следствие 3. 1) Если $\lambda \neq 0$, то $V(\lambda, n, k)^\omega \cong V(\frac{k^2}{\lambda}, n, k)$.
2) $V(0, n, k)^\omega$ не изоморфно $V(\lambda, n, k)$ ни для какого $\lambda \in K$.

Обозначим модуль $V(0, n, k)^\omega$ через $V(\infty, n, k)$.

3. Утверждение о виде неразложимых представлениях алгебры Ли $sl(2)$ можно сформулировать теперь следующим образом:

Теорема 4. *Всякий конечномерный неразложимый ограниченный $sl(2)$ -модуль над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 2$ изоморфен одному из модулей вида: $V(m), V(m)^*, m \in \mathbb{N}_0, m+1 \not\equiv 0 \pmod{p}$; $V(\lambda, n, k), \lambda \in K \cup \{\infty\}, n \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq p-1$; $Q(l), 0 \leq l \leq p-1$.*

Доказательство. Из рассуждений, приведенных в пункте 1, следует, что достаточно рассмотреть случай неразложимых модулей V , для которых $\Gamma_V = k \cdot 1_V, k \in \{1, \dots, \frac{p-1}{2}\}$ и $\dim V_{k-1} = \dim V_{k+1}$. Рассмотрим случай, когда $\hat{e} = \hat{f} = 0$ и \check{e}, \check{f} является неразложимой парой

линейных отображений. Случай, когда $\check{e} = \check{f} = 0$ и \hat{e}, \hat{f} — неразложимая пара рассматривается аналогично.

Из результатов Кронекера–Вейерштрасса следует, что тогда либо отображения \check{e}, \check{f} биективны, либо одно из них биективно, а другое имеет одномерное ядро (см. напр. [10], [6, Теорема 2.7. iii])). Будем сначала считать, что \check{f} биективно. Тогда, если w_1, \dots, w_n — базис в V_{k-1} , то собственные относительно h_V элементы

$$\frac{f^i}{i!} w_j, 0 \leq i \leq p-1, 1 \leq j \leq n$$

образуют базис V . Непосредственные вычисления, использующие, в частности, соотношения в $u(L)$, показывают, что действие L на этом базисе совпадает с действием на базисе $v_i \otimes w_j$ в $V(A, n, k)$ для некоторого A . Если же отображение \check{f} имеет одномерное ядро, то e_V^{p-1} инъективно на V_{k+1} , и, применяя инволюцию Картана, получаем, что $V \cong V(\infty, n, k)$. \square

Список литературы

1. Рудаков А. Н., Шафаревич И. Р. Неприводимые представления простой трехмерной алгебры Ли над полем конечной характеристики // Мат. заметки. 1967. Т. 2. № 5. С. 439–454.
2. Рудаков А. Н. Приводимые p -представления простой трехмерной p -алгебры Ли // Вестн. МГУ. Сер. Математика. Механика. 1982. № 6. С. 45–49.
3. Дрозд Ю. А. Про забраження алгебри Ли $sl(2)$ // Вісн. Київ. ун-ту. Математика і механіка. 1983. Т. 25. С. 70–77.
4. Benkart G. M., Osborn J. M. Representations of rank one Lie algebras of characteristic p // Lie algebras and related topics. Lect. Notes in Math. 1982. V. 933. P. 1–37.
5. Премет А. А. Кольцо Грина простой трехмерной p -алгебры // Препринт № 33 (433). Ин-т математики АН БССР. Минск, 1990.
6. Chari V., Premet A. Indecomposable restricted representations of quantum sl_2 // Publ. RIMS. Kyoto Univ. 1994. V. 30. P. 335–352.
7. Berkson A. J. The u -algebra of a restricted Lie algebra is Frobenius // Proc. Amer. Math. Soc. 1964. V. 15. P. 14–15.
8. Джекобсон Н. Алгебры Ли. М. Мир, 1964.
9. Strade H., Farnsteiner R. Modular Lie algebras and their representations. New York and Basel, 1988.
10. Гантмахер Ф. Теория матриц. М. Наука, 1966.

On indecomposable representations of simple three dimensional Lie algebra

О.К. Ten, А.В. Scheglova

The explicit formulas for new realizations of some indecomposable representations of Lie algebra $sl(2)$ over algebraically closed field of characteristic $p \geq 3$ are found.