2002 г. **№7**

Труды ФОРА

СИММЕТРИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А.Б. Шишкин

Армавирский государственный педагогический институт, г. Армавир

В работе определяется класс симметричных функций, тесно связанный со специальными представлениями функций, аналитических в комплексных областях. Эти представления играют ключевую роль при переходах от конкретных задач проективного описания к эквивалентным задачам индуктивного описания и находят широкое применение в вопросах, связанных со спектральным синтезом для дифференциальных операторов.

Пусть G – открытое множество в $\mathbf{C}^n; \pi : G \to \mathbf{C}^q$ – голоморфное отображение. Множество $g \subseteq G$ будем называть π-симметричным, если существует подмножество V в $\mathbf{C}^q$ такое, что $g = \pi^{-1}(V)$. Функцию $\varphi : g \to \mathbf{C}^q$, заданную на π-симметричном множестве g, будем называть π-симметричной на g, если она представляется в виде композиции $\hat{\varphi} \circ \pi$, где $\hat{\varphi}$ – некоторая локально голоморфная на $\pi(g)$ функция. Совокупность $O_\pi(g)$ всех π-симметричных на g функций образует кольцо, которое, очевидно, является подкольцом кольца $O(g)$ всех функций, локально голоморфных на g. Следует отличать "локально"π-симметричные функции на множестве g, то есть функции из кольца $O_\pi(g)$, от "глобально"π-симметричных функций. Локально π-симметричная на π-симметричном множестве g функция $\varphi = \hat{\varphi} \circ \pi$ – глобально π-симметрична на g, если $\hat{\varphi}$ продолжается до функции, голоморфной в окрестности множества $\pi(g)$.

Выделение класса π- симметричных функций связано со специальными представлениями функций, голоморфных в комплексных областях. Эти представления играют ключевую роль при переходах от конкретных задач проективного описания к изоморфным задачам (см. например, [1-3]).

Аналитические накрытия. Пусть Λ – полный образ отображения $\pi : G \to \mathbf{C}^q$. Будем говорить, что отображение π является аналитическим накрытием над Λ, если выполнены следующие условия:

1) отображение π является собственным (значит, Λ – n-мерное аналитическое множество в $\mathbf{C}^q$ [4, 5.8, теорема Реммерта]);

2) существует аналитическое подмножество $\sigma \subset \Lambda$ размерности $< n$ такое, что $\Lambda_* = \Lambda \backslash \sigma$ – n-мерное комплексное многообразие в пространстве $\mathbf{C}^q$;

3) множество $\pi^{-1}(\sigma)$ нигде не плотно в G;

4) сужение π на $G_* = G \backslash \pi^{-1}(\sigma)$ является локально биголоморфным p-листным накрытием над Λ_*.

Множество σ называется критическим. Его прообраз $\pi^{-1}(\sigma)$ является аналитическим подмножеством G размерности $< n$ [4, 3.7, лемма]. Метрическая размерность $\pi^{-1}(\sigma)$ не превосходит $2n - 2$ [4, 2.6, следствие 2], значит, оно является устранимым [4, П 1.4, теорема], то есть всякая функция, голоморфная на множестве G_* и локально ограниченная в точках множества $\pi^{-1}(\sigma)$, однозначно продолжается до функции, голоморфной в G. π-слои $\pi^{-1}(\lambda), \lambda \in \Lambda$, являются компактными аналитическими подмножествами в G, значит, состоят из конечного числа точек [4, 3.3, предложение 1]. Точки $\lambda \in \Lambda_*$ называются обыкновенными, а соответствующие слои – простыми. Простые π-слои состоят из p различных точек. Упорядочением простого слоя $\pi^{-1}(\lambda)$ называется произвольное взаимно однозначное отображение $\{1, ..., p\} \to \pi^{-1}(\lambda)$. Упорядочение простого π-слоя удобно записывать в виде конечной последовательности $z_1, ..., z_p$. Элементы этой последовательности зависят от точки $\lambda = \pi(z_k) \in \Lambda_*$. Причем отображения

$$z_k = (z_k^{(1)}(\lambda), ..., z_k^{(n)}(\lambda)), k = 1, ..., p,$$

голоморфны в окрестности каждой обыкновенной точки (и зависят от выбора этой точки).

Пусть $\pi^{(i)} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}^{q(i)}, q(i) \in \mathbf{N}, i = 1, ..., n,$ – голоморфные отображения; $\Lambda^{(i)} = \pi^{(i)}(\mathbf{C})$.

Будем считать, что отображения $\pi^{(i)}$ являются аналитическими накрытиями, то есть:

1) отображение $\pi^{(i)} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}^{q(i)}$ является собственным (значит, $\Lambda^{(i)}$ – одномерное аналитическое множество в $\mathbf{C}^{q(i)}$);

2) существует замкнутое дискретное множество $\sigma^{(i)} \subset \Lambda^{(i)}$ такое, что $\Lambda^{(i)}_* = \Lambda^{(i)} \backslash \sigma^{(i)}$ – одномерное комплексное многообразие в $\mathbf{C}^{q(i)}$;

3) сужение $\pi^{(i)}$ на $\mathbf{C}^{(i)}_* = \mathbf{C} \backslash (\pi^{(i)})^{-1}(\sigma^{(i)})$ является локально биголоморфным $p(i)$-листным накрытием над $\Lambda^{(i)}_*$.

Несложно убедиться в том, что прямое произведение $\tilde{\pi} : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^q$, $q = q(1) + ... + q(n)$, отображений $\pi^{(i)}, i = 1, ..., n$, в свою очередь, является аналитическим накрытием.

Наделим $\tilde{\Lambda} = \Lambda^{(1)} \times ... \times \Lambda^{(n)}$ индуцированной из $\mathbf{C}^q$ топологией. Пусть Λ – открытое подмножество в $\tilde{\Lambda}, G = \pi^{-1}(\Lambda)$. Сужение $\pi : G \to \Lambda$ накрытия $\tilde{\pi} : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^q$ на π-симметричное множество G является аналитическим накрытием. Такие аналитические накрытия будем называть специальными. Отметим, что π-симметричные множества являются $\tilde{\pi}$-симметричными множествами, в частности, π-слои совпадают с соответствующими $\tilde{\pi}$-слоями.

Словарное упорядочение. Пусть $\{z^{(i)}_1, ..., z^{(i)}_{p(i)}\}, i = 1, ..., n,$ – упорядоченные наборы независимых переменных (порядок определяют нижние индексы). Декартово произведение

$$\{z^{(1)}_1, ..., z^{(1)}_{p(1)}\} \times \ldots \times \{z^{(n)}_1, ..., z^{(n)}_{p(n)}\}$$

этих множеств обозначим $\tilde{\lambda}$. Конечную последовательность $z_1, ..., z_p$ элементов множества $\tilde{\lambda}$, $p = p(1) \cdots p(n)$, называем словарным упорядочением множества $\tilde{\lambda}$, если для любых двух элементов

$$z_j = (z^{(1)}_{j_1}, ..., z^{(n)}_{j_n}), \quad z_k = (z^{(1)}_{k_1}, ..., z^{(n)}_{k_n})$$

этой последовательности неравенство $j < k$ выполняется тогда и только тогда, когда найдется $m \in \mathbf{N}, m < n$, такое, что $j_1 = k_1, ..., j_m = k_m, j_{m+1} < k_{m+1}$.

Итак, пусть $z_1, \ldots, z_p$ – словарное упорядочение множества $\tilde{\lambda}$. Рассмотрим матрицу

$$Z = \begin{pmatrix} z^{(1)}_1 & \ldots & z^{(n)}_1 \\ z^{(1)}_1 & \ldots & z^{(n)}_2 \\ z^{(1)}_1 & \ldots & z^{(n)}_{p(n)} \end{pmatrix}$$

в которой первая строка состоит из компонент z_1, вторая – из компонент z_2 и т. д.. Разобьем ее на матрицы-блоки $Z_1, \ldots, Z_{p(1)}$ первого ранга, каждая из которых состоит из $p(2) \cdots p(n)$ последовательных строк матрицы Z. Каждый блок Z_k разобьем, в свою очередь, на блоки $Z_{k,1}, \ldots, Z_{k,p(2)}$ второго ранга, каждый из которых состоит из $p(3) \cdots p(n)$ последовательных строк матрицы Z и т.д. Наконец, каждый блок ранга n состоит из одной строки матрицы Z. Используя блочную запись матриц, можно записать

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ --- \\ \cdots \\ --- \\ Z_{p(1)} \end{pmatrix}, Z_k = \begin{pmatrix} Z_{k,1} \\ --- \\ \cdots \\ --- \\ Z_{k,p(2)} \end{pmatrix}, Z_{k,t} = \begin{pmatrix} Z_{k,t,1} \\ --- \\ \cdots \\ --- \\ Z_{k,t,p(3)} \end{pmatrix}, \ldots.$$

При этом блоки ранга m имеют следующий вид

$$Z_{\underbrace{k, \ldots, j}_{m}} = \begin{pmatrix} z^{(1)}_k & \ldots & z^{(m)}_j & | & z^{(m+1)}_1 & \ldots & z^{(n)}_1 \\ . & . & . & | & . & . & . \\ z^{(1)}_k & \ldots & z^{(m)}_j & | & z^{(m+1)}_{p(m+1)} & \ldots & z^{(n)}_{p(n)} \end{pmatrix}$$

Отметим, что первые m столбцов блока ранга m состоят из одинаковых элементов.

Два соседних блока ранга m будем называть смежными, если они лежат в пределах одного блока ранга $m-1$ (Z – блок ранга 0). Простая аналогия с расположением слов в словаре позволяет убедиться в выполнимости следующих утверждений:

а) каждый из двух смежных блоков содержит лишь один столбец, который не является столбцом другого;

б) каждый из выделенных таким образом столбцов составлен из одинаковых элементов.

Столбцы, выделенные утверждением а), будем называть отмеченными столбцами пары смежных блоков. Можно уточнить утверждения а) и б), сказав, что отмеченными столбцами пары смежных блоков $Z_{k,\cdots,j-1}$ и $Z_{k,\cdots,j}$ ранга m являются именно m-е столбцы и состоят они из элементов, совпадающих с $z_{j-1}^{(n)}$ и $z_j^{(n)}$, соответственно.

Опишем процедуру, которой воспользуемся при доказательстве предложения 1. Прежде всего, к каждому из блоков первого ранга $Z_2, \cdots, Z_{p(1)}$ добавим справа отмеченный столбец верхнего смежного ему блока. Получим новую матрицу Z', которая уже не является прямоугольной. Каждый блок $Z_{k,\cdots,j}$ ранга m матрицы Z однозначно определяет блок $Z'_{k,\cdots,j}$ ранга m матрицы Z'. Отметим, что утверждения а) и б) сохраняют свою силу и в отношении пар смежных блоков матрицы Z'. Исключение составляет лишь пара смежных блоков $Z'_1 = Z_1, Z'_2$. При этом отмеченные столбцы пары смежных блоков Z'_{k-1} и $Z'_k, k = 3, \cdots, p(1)$, – это последний столбец Z'_{k-1} и первый столбец Z'_k. Они состоят из элементов, совпадающих с $z_{k-2}^{(1)}$ и $z_k^{(1)}$, соответственно. Далее, к каждому из блоков первого ранга $Z'_3, \cdots, Z'_{p(1)}$ добавим справа отмеченный столбец верхнего смежного ему блока. Получим новую матрицу Z'' и новые блоки $Z''_{k,\cdots,j}$. Утверждения а) и б) сохраняют свою силу в отношении этих блоков. Исключение составляют уже две пары смежных блоков – пара $Z''_1 = Z'_1 = Z_1, Z''_2 = Z'_2$ и пара $Z''_2 = Z'_2, Z''_3$. Отмеченные столбцы смежных блоков Z''_{k-1} и $Z''_k, k = 4, \cdots, p(1)$, – это последний столбец Z''_{k-1} и первый столбец Z''_k. Состоят они из элементов, совпадающих с $z_{k-3}^{(1)}$ и $z_k^{(1)}$, соответственно. Далее, добавим по столбцу к блокам $Z''_4, \cdots, Z''_{p(1)}$ и т.д. Наконец, после $p(1)-1$-го шага приходим к матрице ${}_1Z$, с блоками первого ранга следующего вида

$$
{}_1Z_k = \left(\begin{array}{c|ccc} & z_{k-1}^{(1)} & \dots & z_1^{(1)} \\ Z_k & \dots & & \\ & z_{k-1}^{(1)} & \dots & z_1^{(1)} \end{array} \right); \quad {}_1Z_1 = Z_1.
$$

Следующие преобразования связаны с преобразованием блоков ${}_1Z_k$ первого ранга матрицы ${}_1Z$. Так как эта процедура вполне аналогична проделанной, опишем лишь ее первый шаг. Прежде всего, заметим, что утверждения а) и б) остаются справедливыми для пар смежных блоков ранга > 1 матрицы ${}_1Z$. Воспользуемся этим и к каждому блоку второго ранга ${}_1Z_{k,2}, \cdots, {}_1Z_{k,p(2)}$ добавим справа отмеченный столбец верхнего смежного ему блока. Проделаем эту операцию для каждого k от 1 до $p(1)$. Получим новую матрицу ${}_1Z'$ и новые блоки ${}_1Z'_{k,\cdots,j}$. Утверждения а) и б) остаются справедливыми по отношению к блокам ${}_1Z'_{k,2}, \cdots, {}_1Z'_{k,p(2)}$ (и всем другим ранга > 2). Отмеченные столбцы пары смежных блоков ${}_1Z'_{k,j-1}, {}_1Z'_{k,j}, k = 1, \cdots, p(1), j = 3, \cdots, p(2)$, – это последний столбец ${}_1Z'_{k,j-1}$ и второй столбец ${}_1Z'_{k,j}$. Они состоят из элементов, совпадающих с $z_{j-2}^{(2)}, z_j^{(2)}$, соответственно. Далее добавим по столбцу к блокам ${}_1Z'_{k,3}, \cdots, {}_1Z'_{k,p(2)}$ и т.д. После $p(2)-1$-го шага приходим к матрице ${}_2Z$ с блоками второго ранга следующего вида:

$$
{}_2Z_{k,j} = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc} & z_{k-1}^{(1)} & \dots & z_1^{(1)} & z_{j-1}^{(2)} & \dots & z_1^{(2)} \\ Z_{k,j} & . & . & . & . & . & . \\ & z_{k-1}^{(1)} & \dots & z_1^{(1)} & z_{j-1}^{(2)} & \dots & z_1^{(2)} \end{array} \right); \quad {}_2Z_{1,1} = Z_{1,1},
$$

$$
{}_2Z_{1,j} = \left(\begin{array}{c|ccc} & z_{j-1}^{(2)} & \dots & z_1^{(2)} \\ Z_{1,j} & . & . & . \\ & z_{j-1}^{(2)} & \dots & z_1^{(2)} \end{array} \right), {}_2Z_{k,1} = \left(\begin{array}{c|ccc} & z_{k-1}^{(1)} & \dots & z_1^{(1)} \\ Z_{k,1} & . & . & . \\ & z_{k-1}^{(1)} & \dots & z_1^{(1)} \end{array} \right).
$$

Затем, переходим к изменениям блоков второго ранга в матрице ${}_2Z$ и т.д. После преобразований блоков ранга $n-1$ в матрице ${}_{n-1}Z$, приходим к матрице ${}_nZ$, с блоками ранга n следующего вида:

$$ {}_nZ_{k,\dots,j} = (Z_{k,\dots,j}|z_{k-1}^{(1)}\dots z_1^{(1)}|\dots|z_{j-1}^{(n)}\dots z_1^{(n)}) $$

(если один из индексов $k,\cdots,j$ равен 1, то соответствующий ему блок в последней матрице отсутствует). Дальнейшее осуществление описанной процедуры теряет смысл, так как блоки ранга n матрицы ${}_nZ$ это ее строки.

Определитель Δ. Выберем две произвольные невырожденные матрицы $A=(a_{k,j})$ размера $m\times m$ и B размера $l\times l$. Прямым (внешним) произведением матрицы A на матрицу B называется матрица

$$ A\times B = \begin{pmatrix} a_{11}B & | & \cdots & | & a_{1m}B \\ - & - & - & - & - \\ \cdots & | & \cdots & | & \cdots \\ - & - & - & - & - \\ a_{m1}B & | & \cdots & | & a_{mm}B \end{pmatrix} $$

Определитель $|A\times B|$ матрицы $A\times B$ совпадает с произведением $|A|^l|B|^m$, где $|A|$ – определитель матрицы A, $|B|$ - определитель матрицы B. В этом легко убедиться, приводя матрицу $A\times B$ к блочной диагональной форме.

Пусть $a_1,\cdots,a_m\in\mathbf{C}$. Рассмотрим квадратную матрицу

$$ D(a_1,\cdots,a_m) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{m-1} \\ . & . & . & . \\ 1 & a_m & \dots & a_m^{m-1} \end{pmatrix}. $$

Ее определитель $\Delta(a_1,\dots,a_m)$ называется определителем Вандермонда и совпадает с произведением

$$ \prod_{1\le k<j\le m}(a_j-a_k). $$

Пусть $\{z_1^{(i)},\dots,z_{p(i)}^{(i)}\}, i=1,\dots,n,$ – упорядоченные совокупности независимых переменных, $z_1,\dots,z_p, p=p(1)\cdots p(n)$, – словарное упорядочение декартова произведения этих совокупностей. Рассмотрим матрицу $D=D(z_1^{(1)},\dots,z_{p(1)}^{(1)})\times\dots\times D(z_1^{(n)},\dots,z_{p(n)}^{(n)})$ (операции прямого произведения выполняются последовательно, начиная с первой). Ее определитель обозначим $\Delta=\Delta(z_1,\dots,z_p)$. Легко понять, что он равен произведению

$$ \Delta_1^{p_1}\Delta_2^{p_2}\cdots\Delta_n^{p_n} = \prod_{i=1}^{n}\prod_{1\le k<j\le p(i)}(z_j^{(i)}-z_k^{(i)})^{p_i}, $$

где $p=p/p(i), \Delta_i=(z_1^{(i)},\dots,z_{p(i)}^{(i)})$. Будучи записанным в канонической форме, определитель Δ приобретает вид

$$ \Delta=\Delta(z_1,\dots,z_p)=\begin{pmatrix} z_1^{\alpha_1} & \dots & z_1^{\alpha_p} \\ . & . & . \\ z_p^{\alpha_1} & \dots & z_p^{\alpha_p} \end{pmatrix} $$

где $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ – словарное упорядочение множества

$$ \{0,\dots,p(1)-1\}\times\dots\times\{0,\dots,p(n)-1\}; $$

$$ \alpha_k=(\alpha_k^{(1)},\dots,\alpha_k^{(n)}); z_j^{\alpha_k}=(z_j^{(1)})^{\alpha_k^{(1)}}\cdots(z_j^{(n)})^{\alpha_k^{(n)}}. $$

Выберем систему $g^{(1)},\dots,g^{(n)}$ открытых множеств в $\mathbf{C}$ и систему

$$ \varphi_1(z^{(1)},\dots,z^{(n)}),\dots,\varphi_p(z^{(1)},\dots,z^{(n)}) $$

функций, голоморфных на декартовом произведении $g^{(1)}\times\dots\times g^{(n)}$. Рассмотрим выражение:

$$ F=\frac{|\Phi|}{\Delta} $$

где

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1(z_1) & \dots & \varphi_p(z_1) \\ . & . & . \\ \varphi_1(z_p) & \dots & \varphi_p(z_p) \end{pmatrix}$$

Определитель $|\Phi|$ является голоморфной функцией на множестве $g^{(i)}$ по каждой переменной $z_1^{(i)}, \dots, z_{p(i)}^{(i)}, i = 1, \dots, n$. Значит, по теореме Хартогса она голоморфна как функция переменной $(z_1^{(1)}, \dots, z_{p(1)}^{(1)}, \dots, z_1^{(n)}, \dots, z_{p(n)}^{(n)})$ на декартовом произведении

$$\mathbf{G} = \underbrace{g^{(1)} \times \dots \times g^{(1)}}_{p(1)} \times \dots \times \underbrace{g^{(n)} \times \dots \times g^{(n)}}_{p(n)}.$$

Это позволяет рассматривать выражение F как функцию, голоморфную на множестве $\mathbf{G} \setminus Z(\Delta)$, где $Z(D)$ – нулевое множество определителя Δ, то есть множество всех точек из $\mathbf{G}$, у которых хотя бы две координаты $z_j^{(i)}, z_k^{(i)}$ совпадают.

Предложение 1. *F допускает однозначное аналитическое продолжение до функции, голоморфной в $\mathbf{G}$.*

Доказательство. Однозначность продолжения, если оно существует, следует из соображений непрерывности. Установим, что продолжение существует. Для этого осуществим преобразования матрицы Φ, которую будем обозначать $\Phi(Z)$, отмечая этим характер зависимости ее элементов от независимых переменных. Эти преобразования будут тесно связаны с процедурой, описанной в п. 1. Прежде всего, разобьем матрицу $\Phi(Z)$ на блоки первого ранга $\Phi(Z_1), \dots, \Phi(Z_{p(1)})$, каждый из которых состоит из $p(2) \cdots p(n)$ последовательных строк матрицы $\Phi(Z)$. Затем, разбиваем каждый блок $\Phi(Z_k)F(Z)$ на блоки второго ранга $\Phi(Z_{k,1}), \dots, \Phi(Z_{k,p(2)})$ и т.д. Используя блочную запись матриц, будем иметь:

$$\Phi(Z) = \begin{pmatrix} \Phi(Z_1) \\ --- \\ \dots \\ --- \\ \Phi(Z_{p(1)}) \end{pmatrix}, \quad \Phi(Z_k) = \begin{pmatrix} \Phi(Z_{k,1}) \\ --- \\ \dots \\ --- \\ \Phi(Z_{k,p(2)}) \end{pmatrix}, \dots.$$

Далее, каждый из блоков первого ранга $\Phi(Z_k), k = 2, \dots, p(1)$, заменим на блок

$$\Phi(Z'_k) = \frac{\Phi(Z_k) - \Phi(Z_{k-1})}{z_k^{(1)} - z_{k-1}^{(1)}}.$$

Получим новую матрицу $\Phi(Z')$, элементы которой являются функциями, голоморфными на множестве $\mathbf{G}$. Отметим, что определители матриц $\Phi(Z)$ и $\Phi(Z')$ связаны соотношением

$$|\Phi(Z)| = (z_{p(1)}^{(1)} - z_{p(1)-1}^{(1)})^{p_1} \cdots (z_2^{(1)} - z_1^{(1)})^{p_1} |\Phi(Z')|.$$

Далее, вновь каждый из блоков первого ранга $\Phi(Z'_k), k = 3, \dots, p(1)$, заменим на блок

$$\Phi(Z''_k) = \frac{\Phi(Z'_k) - \Phi(Z'_{k-1})}{z_k^{(1)} - z_{k-2}^{(1)}}.$$

Получим новую матрицу $\Phi(Z'')$, элементы которой снова являются функциями, голоморфными на множестве $\mathbf{G}$. Определители матриц $\Phi(Z')$ и $\Phi(Z'')$ связаны соотношением

$$|\Phi(Z')| = (z_{p(1)}^{(1)} - z_{p(1)-2}^{(1)})^{p_1} \cdots (z_3^{(1)} - z_1^{(1)})^{p_1} |\Phi(Z'')|.$$

Далее, заменяем блоки первого ранга $\Phi(Z''_k), k = 4, \dots, p(1)$, и т. д. Приходим, наконец, к матрице $\Phi({}_1Z)$, элементы которой голоморфны на $\mathbf{G}$. Определители матриц $\Phi(Z)$ и $\Phi({}_1Z)$ связаны соотношением

$$|\Phi(Z)| = \Delta_1^{p_1} |\Phi({}_1Z)|. \tag{1}$$

Следующие преобразования связаны с изменениями внутри блоков $\Phi({}_1Z_k)$ первого ранга матрицы $\Phi({}_1Z)$. Так как эта процедура вполне аналогична проделанной, опишем лишь ее первый шаг. Внутри блока $\Phi({}_1Z_k)$ заметим каждый блок второго ранга $\Phi({}_1Z_{k,j}), j=2,\ldots,p(2)$, на блок

$$\Phi({}_1Z''_{k,j}) = \frac{\Phi({}_1Z_{k,j}) - \Phi({}_1Z_{k,j-1})}{z_j^{(2)} - z_{j-1}^{(2)}}.$$

и проделаем эту операцию для каждого k от 1 до $p(1)$. Получим новую матрицу $\Phi({}_1Z')$, все элементы которой голоморфны на множестве $\mathbf{G}$. Определители матриц $\Phi({}_1Z)$ и $\Phi({}_1Z')$ связаны соотношением:

$$|\Phi({}_1Z)| = (z_{p(2)}^{(2)} - z_{p(2)-1}^{(2)})^{p_2} \cdots (z_2^{(2)} - z_1^{(2)})^{p_2} |\Phi({}_1Z')|.$$

Далее, заменяем блоки второго ранга $\Phi({}_1Z'_{k,j}), j=3,\ldots,p(2)$, и т.д. Приходим, наконец, к матрице $\Phi({}_2Z)$, элементы которой голоморфны на множестве $\mathbf{G}$. Определители матриц $\Phi({}_1Z)$ и $\Phi({}_2Z)$ связаны соотношением

$$|\Phi({}_1Z)| = \Delta_2^{p_2}|\Phi({}_2Z)|. \tag{2}$$

Затем переходим к изменениям внутри блоков $\Phi({}_2Z_{k,j})$ второго ранга матрицы $\Phi({}_2Z)$ и т.д. После преобразований блоков ранга $n-1$ в матрице $\Phi({}_{n-1}Z)$ приходим к матрице $\Phi({}_nZ)$, все элементы которой голоморфны на множестве $\mathbf{G}$. Определители матриц $\Phi({}_{n-1}Z)$ и $\Phi({}_nZ)$ связаны соотношением

$$|\Phi({}_{n-1}Z)| = \Delta_n^{p_n}|\Phi({}_nZ)|. \tag{3}$$

Из (1), (2), (3) вытекает соотношение

$$|\Phi(Z)| = \Delta|\Phi({}_nZ)|.$$

Таким образом, $F = |\Phi({}_nZ)|$. Это и доказывает предложение.

Представление аналитических функций. Пусть $\pi : G \to \Lambda$ – специальное аналитическое накрытие; $O(\Lambda)$ –кольцо функций, локально голоморфных на Λ; $O(\Lambda_*)$ – кольцо функций, локально голоморфных на Λ_*; $O_*(\Lambda)$ – подкольцо $O(\Lambda_*)$, состоящее из локально ограниченных на Λ функций. Отображение

$$O(\Lambda_*) \to O_\pi(G_*)|\hat\varphi \to \hat\varphi \circ \pi$$

называется кольцевым изоморфизмом. Так как отображение π является собственным, а множество $\pi^{-1}(\sigma)$ – устранимым, то сужение последнего отображения на $O_*(\Lambda)$ является кольцевым изоморфизмом $O_*(\Lambda)$ на $O_\pi(G_*)\bigcap O(G)$.

Пусть $z \in G_*$ и $\pi(z) = \lambda = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^n) \in \Lambda_*$. π-слой $\pi^{-1}(\lambda)$ обозначим $\tilde\lambda$. Он, очевидно, совпадает с декартовым произведением $\tilde\lambda^{(1)} \times \ldots \times \tilde\lambda^{(n)}$ простых $\pi^{(i)}$-слоев, $i=1,\ldots,n$. Обозначим $z_1^{(i)}, ..., z_{p(i)}^{(i)}$ – произвольное упорядочение простого $\pi^{(i)}$- слоя $\tilde\lambda^{(i)}; z_1, ..., z_p$ – словарное упорядочение слоя $\tilde\lambda$. Рассмотрим выражение

$$F = \frac{|\Phi|}{\Delta},$$

где $|\Phi| = |\Phi|(z_1,...,z_p), \Delta = \Delta(z_1,...,z_p), \varphi_1,...,\varphi_p \in O(G)$, и определим функции $f : G_* \to \mathbf{C}$, $\hat f : \Lambda_* \to \mathbf{C}$, полагая

$$f(z) = F(z_1,...,z_p), \quad \hat f(\lambda) = F(z_1(\lambda),...,z_p(\lambda)).$$

Изменение порядка внутри каждой из совокупностей $\{z_1^{(1)},...,z_{p(1)}^{(1)}\},...,\{z_1^{(n)},...,z_{p(n)}^{(n)}\}$ влечет лишь изменение порядка в совокупности $\{z_1,...,z_p\}$, что не влияет на F. Кроме того, $\Delta = \Delta(z_1,...,z_p) \neq 0$ для всякого $z \in G_*$, значит, определения функций f и $\hat f$ корректны. С другой стороны, отображения $z_1(\lambda),...,z_p(\lambda)$ голоморфны в достаточно "малых"окрестностях обыкновенных точек, значит, $\hat f \in O(\Lambda_*)$. Более того, из предложения 1 вытекает включение $\hat f \in O_*(\Lambda)$. Действительно, пусть $\lambda = (\lambda^{(1)},...,\lambda^{(n)}) \in \sigma$ и $k^{(i)} \subset \Lambda^{(i)}$ – компактная окрестность точки $\lambda^{(i)}, d^{(i)} \subset \Lambda^{(i)}$

– открытая окрестность компакта $k^{(i)}, g^{(i)} = (\pi^{(i)})^{-1}(d^{(i)})$. Окрестности $k^{(i)}, d^{(i)}$ выбираем так, чтобы выполнялись включения

$$\lambda^{(i)} \in intk^{(i)} \neq \varnothing, \lambda \in d^{(1)} \times \ldots \times d^{(n)} \subseteq \Lambda, \tilde{\lambda} \subset g^{(1)} \times \ldots \times g^{(n)} \subseteq G.$$

Так как отображение $\pi^{(i)}$ собственное, то множество $K^{(i)} = (\pi^{(i)})^{-1}(k^{(i)})$ – компакт в $g^{(i)}$. По предложению 1 функция F аналитическая на множестве $\mathbf{G} = (g^{(1)})^{p(1)} \times \ldots \times (g^{(n)})^{p(n)}$ и, следовательно, ограничена на множестве $(K^{(1)})^{p(1)} \times \ldots \times (K^{(n)})^{p(n)}$. Это означает, что функция $\hat{f}$ ограничена на множестве $k^{(1)} \times \ldots \times k^{(n)}$. Таким образом, действительно, функция $\hat{f}$ является локально ограниченной на Λ.

Продолжая изучение функций f и $\hat{f}$, учтем, что для любого $z \in G_*$ и $\lambda = \pi(z)$ справедливы соотношения $f(z) = \hat{f}(\lambda) = (\hat{f} \circ \pi)(z)$. Из этих соотношений вытекает, что функция $f \in O_\pi(G_*)$ локально ограничена в точках множества $\pi^{-1}(\sigma)$. Это множество является устранимым. Значит, f допускает однозначное продолжение до функции, голоморфной в G. Этот факт отметим включением

$$f \in O_\pi(G_*) \bigcap O(G).$$

Теперь все готово для того, чтобы доказать

Предложение 2. *Любая функция $f \in O(G)$ единственным образом представляется в виде:*

$$f = \sum_{k=1}^{p} z^{\alpha_k} f^{(k)}, f^{(k)} \in O_\pi(G_*) \bigcap O(G). \tag{4}$$

При этом сужение $f^{(k)}$ на G_* представляется в виде $\Delta_k(f)/\Delta$, где $\Delta_k(f)$ – определитель, полученный заменой k-го столбца в определителе Δ на столбец из $f(z_1), ..., f(z_p); z_1, ..., z_p$ – словарное упорядочение простого π-слоя $\tilde{\lambda}$, содержащего z.

Доказательство. Согласно известным свойствам определителей для любого $z \in G_*$ имеет место векторное равенство

$$\tilde{f}\Delta = \sum_{k=1}^{p} \tilde{z}^{\alpha_k} \Delta_k(f),$$

где $\tilde{f} = (f(z_1), ..., f(z_p)), \tilde{z}^{\alpha_k} = (z_1^{\alpha_k}, ..., z_p^{\alpha_k})z = (z, ..., z)$. Определитель Δ отличен от нуля при $z \in G_*$. Поэтому при $z \in G_*$ справедливо равенство

$$\tilde{f} = \sum_{k=1}^{p} \tilde{z}^{\alpha_k} f^{(k)}, \tag{5}$$

где $f^{(k)} = \Delta_k(f)/\Delta \in O_\pi(G_*)$. Функции $f^{(k)}$ допускают однозначное продолжение до функций из $O(G)$. Это значит, что

$$f^{(k)} \in O_\pi(G_*) \bigcap O(G), k = 1, \ldots, p.$$

Очевидно, что соотношения (4) и (5) равносильны. Единственность представления (4) связана с тем, что из соотношений (5) $f^{(k)}$ определяются по правилу Крамера. Действительно,

$$\begin{cases} f(z_1) = z_1^{\alpha_1} f^{(1)}(z_1) + \ldots + z_1^{\alpha_p} f^{(p)}(z_1), \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ f(z_p) = z_p^{\alpha_1} f^{(1)}(z_p) + \ldots + z_p^{\alpha_p} f^{(p)}(z_p). \end{cases}$$

Предложение доказано.

Литература

1. *Шишкин А.Б.* Спектральный синтез для оператора, порождаемого умножением на степень независимой переменной//Мат. сб. 1991. Т. 182, N 6. – С. 828-848.

2. *Красичков-Терновский И.Ф.* Спектральный синтез в комплексной области для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. I. Теорема двойственности// Мат. сб. 1991. Т. 182, N 11. – С. 1559-1588.

3. *Шишкин А.Б.* Спектральный синтез для систем дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Теорема двойственности//Мат. сб. 1998. Т. 189, N 9. – С. 143-160.

4. *Чирка Е.М.* Комплексные аналитические множества. – М.: Наука, 1985.

Symmetrical representations of analytical functions

A.B. Shishkin

The paper is defined the class of symmetrical functions related to special representations of analytical functions in complex areas. These representations play a key role in transitions from concrete problems of projective description. Which is widely used in spectral synthesis for differential operators.

