2002 г. №7

Труды ФОРА

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРАМИ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

С.Н. Асхабов

Майкопский государственный технологический институт, г. Майкоп

Комбинированием метода потенциальных монотонных операторов и принципа сжимающих отображений, в вещественных пространствах $L_2(a,b)$ доказываются теоремы существования и единственности решения для различных классов нелинейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала.

Комбинированием метода потенциальных монотонных операторов [1] и принципа сжимающих отображений, в вещественных пространствах $L_2(a,b)$ доказываются теоремы существования и единственности решения для различных классов нелинейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала. Показано, что решения этих уравнений могут быть найдены методом последовательных приближений, для которых получены оценки скорости сходимости. Ранее аналогичные результаты были получены в работах автора (см. обзор [2, §3]) для нелинейных уравнений с сингулярными операторами, не являющимися потенциальными. Использование свойства потенциальности рассматриваемых операторов позволило существенно улучшить соответствующие оценки скорости сходимости последовательных приближений.

Будем использовать, в основном, терминологию и обозначения, принятые в [1]. Всюду в работе предполагается, что $p > 1$ и $0 < \alpha < 1$. Обозначим через $L_p(a,b)$ множество всех вещественных измеримых на $[a,b]$ функций $u(x)$ с конечной нормой $||u||_p = \left(\int_a^b |u(x)|^p dx\right)^{1/p}$. Согласно теореме Харди-Литтльвуда [3, с. 64, 180], оператор типа потенциала

$$(I^\alpha u)(x) = \int_a^b \frac{u(s)}{|x-s|^{1-\alpha}} ds$$

действует непрерывно из $L_{2/(1+\alpha)}(a,b)$ в $L_{2/(1-\alpha)}(a,b)$, причем

$$||I^\alpha u||_{2/(1-\alpha)} \le n(\alpha) \cdot ||u||_{2/(1+\alpha)} \qquad \forall u \in L_{2/(1+\alpha)}(a,b), \tag{1}$$

где $n(\alpha) = ||I^\alpha||_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)}$ - норма оператора I^α. Кроме того [4, с. 43], он является симметрическим и строго положительным оператором. Следовательно [5, с. 63], оператор I^α является также и потенциальным оператором.

Лемма 1. Пусть $0 < \alpha < 1$ и почти всюду отличная от нуля на $[a,b]$ функция $b(x) \in L_{2/\alpha}(a,b)$. Тогда оператор

$$(B^\alpha u)(x) = b(x) \int_a^b \frac{b(s)\cdot u(s)}{|x-s|^{1-\alpha}}\, dt$$

действует непрерывно из $L_2(a,b)$ в $L_2(a,b)$ и является симметрическим, строго положительным, потенциальным оператором, причем

$$||B^\alpha u||_2 \le n(\alpha) \cdot ||b||^2_{2/\alpha} \cdot ||u||_2 \qquad \text{и} \qquad (B^\alpha u, u) \ge 0 \qquad \forall u \in L_2(a,b), \tag{2}$$

где $n(\alpha)$ определено в (1), а символ $(\cdot,\cdot)$ означает скалярное произведение в $L_2(a,b)$.

Доказательство. Пусть $u(x) \in L_2(a,b)$. Тогда, в силу неравенства Гельдера, $||b{\cdot}u||_{2/(1+\alpha)} \leq ||b||_{2/\alpha} \cdot ||u||_2$, т.е. $b \cdot u \in L_{2/(1+\alpha)}(a,b)$. Но тогда, в силу неравенства (1),

$$||I^\alpha(b \cdot u)||_{2/(1-\alpha)} \leq n(\alpha) \cdot ||b \cdot u||_{2/(1+\alpha)} \leq n(\alpha) \cdot ||b||_{2/\alpha} \cdot ||u||_2,$$

т.е. $v \equiv I^\alpha(b \cdot u) \in L_{2/(1-\alpha)}(a,b)$. Далее, так как $B^\alpha u = b \cdot I^\alpha(b \cdot u) = b \cdot v$, то, в силу неравенства Гельдера, $||b{\cdot}v||_2 \leq ||b||_{2/\alpha}{\cdot}||v||_{2/(1-\alpha)}$. Следовательно, с учетом предыдущего неравенства, имеем

$$||B^\alpha u||_2 = ||b \cdot I^\alpha(b \cdot u)||_2 = ||b \cdot v||_2 \leq ||b||_{2/\alpha} \cdot ||v||_{2/(1-\alpha)} =$$

$$= ||b||_{2/\alpha} \cdot ||I^\alpha(b \cdot u)||_{2/(1-\alpha)} \leq n(\alpha) \cdot ||b||^2_{2/\alpha} \cdot ||u||_2,$$

т.е. справедливо первое неравенство из (2). Значит, оператор B^α действует непрерывно из $L_2(a,b)$ в $L_2(a,b)$.

Наконец, в силу равенства

$$(B^\alpha u, u) = (b \cdot I^\alpha(b \cdot u), u) = \langle I^\alpha(b \cdot u), b \cdot u \rangle,$$

где символ $\langle f, x \rangle$ означает значение линейного непрерывного функционала $f \in L^*_{2/(1+\alpha)}(a,b) = L_{2/(1-\alpha)}(a,b)$ на элементе $x \in L_{2/(1+\alpha)}(a,b)$, и того, что оператор I^α является симметрическим, строго положительным, потенциальным оператором, получаем, что этими же свойствами обладает и оператор B^α - что и требовалось доказать.

Приступим теперь к исследованию нелинейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала.

Всюду ниже предполагается, что вещественная функция $F(x,t)$, определяющая нелинейность рассматриваемых уравнений, определена при $x \in [a,b]$, $t \in (-\infty, \infty)$ и удовлетворяет условиям Каратеодори [5]: она измерима по x почти при каждом фиксированном t и почти при всех x непрерывна по t. Обозначим через F оператор суперпозиции (оператор Немыцкого) $Fu = F[x, u(x)]$ порожденный этой функцией.

В работе [6] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы 1. Если существуют постоянные $m > 0$ и $M > 0$ такие, что почти при каждом фиксированном $x \in [a,b]$ и $\forall t_1, t_2 \in (-\infty, \infty)$ выполняются условия:*

1) $|F(x,t_1) - F(x,t_2)| \leq M \cdot |t_1 - t_2|$,

2) $(F(x,t_1) - F(x,t_2)) \cdot (t_1 - t_2) \geq m \cdot |t_1 - t_2|^2$,

то при любом $f(x) \in L_2(a,b)$ уравнение

$$F[x, u(x)] + b(x) \int\limits_a^b \frac{b(s) \cdot u(s)}{|x-s|^{1-\alpha}}\, ds = f(x) \tag{3}$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_2(a,b)$. Это решение можно найти методом итераций по схеме:

$$u_n = u_{n-1} - \frac{2}{M + m + n(\alpha) \cdot ||b||^2_{2/\alpha}} \cdot (Fu_{n-1} + B^\alpha u_{n-1} - f), \qquad n \in N, \tag{4}$$

причем имеет место оценка погрешности:

$$||u_n - u^*||_2 \leq \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{M - m + n(\alpha) \cdot ||b||^2_{2/\alpha}}{M + m + n(\alpha) \cdot ||b||^2_{2/\alpha}} \right)^n \cdot ||Fu_0 + B^\alpha u_0 - f||_2, \tag{5}$$

где $u_0(x) \in L_2(a,b)$ - произвольная функция (начальное приближение).

Следующие две теоремы относятся к другим классам нелинейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда уравнение*

$$u(x) + b(x) \int_a^b \frac{b(s) \cdot F[s, u(s)]}{|x-s|^{1-\alpha}} \, ds = f(x) \tag{6}$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_2(a,b)$. Это решение можно найти методом последовательных приближений, которые определяются по формуле: $u_n = F^{-1} v_n$, где

$$v_n = v_{n-1} - \frac{2 \cdot m \cdot M^2}{M^2 + m^2 + m \cdot M \cdot n(\alpha) \cdot ||b||^2_{2/\alpha}} \cdot (F^{-1} v_{n-1} + B^\alpha v_{n-1} - f), \qquad n \in N, \tag{7}$$

и для которых справедлива оценка погрешности:

$$||u_n - u^*||_2 \leq \frac{M^2}{m^2} \cdot \left(\frac{M^2 - m^2 + m \cdot M \cdot n(\alpha) \cdot ||b||^2_{2/\alpha}}{M^2 + m^2 + m \cdot M \cdot n(\alpha) \cdot ||b||^2_{2/\alpha}} \right)^n \cdot ||F^{-1} v_0 + B^\alpha v_0 - f||_2, \tag{8}$$

где F^{-1} - оператор, обратный к F и $v_0(x) \in L_2(a,b)$ - произвольная функция.

Доказательство. Из условий 1) и 2) следует, что оператор суперпозиции F действует непрерывно из $L_2(a,b)$ в $L_2(a,b)$, причем

$$||Fu - Fv||_2 \leq M \cdot ||u - v||_2 \qquad \forall u, v \in L_2(a,b), \tag{9}$$

$$(Fu - Fv, u - v) \geq m \cdot ||u - v||_2^2 \qquad \forall u, v \in L_2(a,b). \tag{10}$$

Кроме того, оператор F является потенциальным (см. [5, с. 61]). Из оценок (9) и (10), в силу следствия 2.3 [1, с. 97], вытекает существование обратного оператора F^{-1}, который непрерывен и также как и F является липшиц-непрерывным и сильно монотонным оператором, причем:

$$||F^{-1}u - F^{-1}v||_2 \leq \frac{1}{m} \cdot ||u - v||_2 \qquad \forall u, v \in L_2(a,b), \tag{11}$$

$$(F^{-1}u - F^{-1}v, u - v) \geq \frac{m}{M^2} \cdot ||u - v||_2^2 \qquad \forall u, v \in L_2(a,b). \tag{12}$$

Кроме того, оператор F^{-1} является потенциальным (см. [5, с. 137]).

Рассмотрим теперь уравнение (6). Запишем его в операторном виде:

$$u + B^\alpha F u = f. \tag{13}$$

Легко видеть, что если $v^* \in L_2(a,b)$ является решением уравнения

$$F^{-1} v + B^\alpha v = f, \tag{14}$$

то $u^* = F^{-1} v^* \in L_2(a,b)$ является решением уравнения (13), причем эти решения u^* и v^* являются единственными, так как F и F^{-1} являются строго монотонными операторами.

Используя вместо оценок (9) и (10) неравенства (11) и (12), точно так же как и при доказательстве теоремы 1 получим, что уравнение (14) имеет единственное решение $v^* \in L_2(a,b)$ и что это решение можно найти методом итераций по схеме вида (4):

$$v_n = v_{n-1} - \frac{2}{M_1 + m_1 + n(\alpha) \cdot ||b||^2_{2/\alpha}} \cdot (F^{-1} v_{n-1} + B^\alpha v_{n-1} - f), \qquad n \in N, \tag{15}$$

с оценкой погрешности вида (5):

$$||v_n - v^*||_2 \leq \frac{1}{m_1} \cdot \left(\frac{M_1 - m_1 + n(\alpha) \cdot ||b||^2_{2/\alpha}}{M_1 + m_1 + n(\alpha) \cdot ||b||^2_{2/\alpha}} \right)^n \cdot ||F^{-1} v_0 + B^\alpha v_0 - f||_2, \tag{16}$$

где $M_1 = \frac{1}{m}$, $m_1 = \frac{m}{M^2}$ и $v_0 \in L_2(a,b)$ - начальное приближение.

Следовательно, уравнение (13), а, значит, и уравнение (6), имеет единственное решение $u^* = F^{-1}v^* \in L_2(a,b)$. Это решение можно найти методом итераций по схеме (7), получающейся из (15) при $M_1 = \frac{1}{m}$, $m_1 = \frac{m}{M^2}$, с оценкой погрешности (8), получающейся из (16) с учетом, что

$$||u_n - u^*||_2 = ||F^{-1}v_n - F^{-1}v^*||_2 \le \frac{1}{m} \cdot ||v_n - v^*||_2,$$

в силу (11).

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда уравнение*

$$u(x) + F\left[x, b(x)\int\limits_a^b \frac{b(s)\cdot u(s)}{|x-s|^{1-\alpha}}\,ds\right] = f(x) \tag{17}$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_2(a,b)$. Это решение можно найти методом последовательных приближений, которые определяются по формуле:

$$u_n = u_{n-1} + \frac{2\cdot m \cdot M}{M^2 + m^2 + m\cdot M^2 \cdot n(\alpha)\cdot ||b||^2_{2/\alpha}} \cdot (F^{-1}(f - u_{n-1}) - B^\alpha u_{n-1}), \qquad n \in N, \tag{18}$$

и для которых справедлива оценка погрешности:

$$||u_n - u^*||_2 \le \frac{M^2}{m} \cdot \left(\frac{M^2 - m^2 + m\cdot M\cdot n(\alpha)\cdot ||b||^2_{2/\alpha}}{M^2 + m^2 + m\cdot M\cdot n(\alpha)\cdot ||b||^2_{2/\alpha}}\right)^n \cdot ||F^{-1}(f - u_0) + B^\alpha u_0||_2, \tag{19}$$

где F^{-1} - оператор, обратный к F и $u_0(x) \in L_2(a,b)$ - произвольная функция.

Доказательство. Из условий 1) и 2) вытекает (см. доказательство теоремы 2), что оператор суперпозиции F имеет обратный оператор $F^{-1} : L_2(a,b) \to L_2(a,b)$, который является липшиц-непрерывным, сильно монотонным и потенциальным.

Запишем уравнение (17) в операторном виде:

$$u + FB^\alpha u = f. \tag{20}$$

Полагая в (20) $f - u = v$ и применяя затем к обеим частям получившегося уравнения оператор F^{-1}, придем к уравнению

$$F^{-1}v + B^\alpha v = g, \qquad \text{где} \quad g = B^\alpha f, \tag{21}$$

т.е. к уравнению вида (14), где роль f играет $g = B^\alpha f$.

Следовательно (см. доказательство теоремы 2), уравнение (21) имеет единственное решение $v^* \in L_2(a,b)$ и это решение можно найти методом итераций по схеме (15) с оценкой погрешности (16), где $M_1 = \frac{1}{m}$, $m_1 = \frac{m}{M^2}$, $f = g$. Но тогда уравнение (20), а, значит, и уравнение (17), имеет решение $u^* = f - v^*$ и это решение единственно в $L_2(a,b)$, в силу сильной монотонности оператора F и положительности оператора B^α. Полагая в (15) и (16) $v_n = f - u_n$, $v^* = f - u^*$, $v_0 = f - u_0$ и учитывая, что $g = B^\alpha f$, получим (18) и (19).

Теорема 3 доказана.

В заключение отметим работу [7], в которой комбинированием метода монотонных операторов и принципа сжимающих отображений изучается вольтерровское нелинейное интегральное уравнение с ядром типа потенциала (нелинейное уравнение Абеля):

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x \frac{K(x,s,u(s))}{(x-s)^{1-\alpha}}\,ds = f(x)$$

в предположении, что нелинейность $K(x,s,t)$ имеет производную по x, удовлетворяющую условию Липшица по t.

Литература

1. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М:Мир, 1978. - 336 с.

2. *Асхабов С.Н.* Сингулярные интегральные уравнения с монотонной нелинейностью // Деп. в ВИНИТИ 04.12.89, N7198-B89 (РЖ Матем. 1990, N4Б436). - 75 с.

3. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск:Наука и техника, 1987. - 688 с.

4. *Нахушев А.М.* Элементы дробного исчисления и их применение. Нальчик, 2000. - 299 с.

5. *Вайнберг М.М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М.:Наука, 1972. - 416 с.

6. *Асхабов С.Н.* Приближенное решение нелинейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала. В сборнике "Материалы пятой научно-практ. конф. Майкопского гос. технол. ин-та". Майкоп, МГТИ. 2001. - С. 53-60.

7. *Ang D.D., Gorenflo R.* On nondegenerate and degenerate nonlinear Abel integral equations of the first kind // Nonlinear Anal. Theory, Meth. Appl. 1994. V. 22, N1. P. 63-72.

Solution of nonlinear integral equations with potential type operators by the method of successive approximations

S.N. Askhabov

By combining the method of potential monotone operators and Banach's fixed point principle, existence and uniqueness theorems are proved for some classes of nonlinear integral equations with potential type kernels in real spaces $L_2(a, b)$.

