2002 г. № 7
Труды ФОРА

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ

О.П. Шевякова

Майкопский государственный технологический институт, г. Майкоп

В статье изучаются периодические решения уравнений Бернулли.

Известно (см. например, [1, с.92]), что существуют элементарные доказательство того факта, что число вещественных периодических решений уравнения Риккати и Абеля не превосходят соответственно два и три. Однако, как показал В.А. Плисс [2], число вещественных периодических решений дифференциального уравнения с полиномиальной правой частью относительно неизвестной функции может быть больше степени этого уравнения. Кроме того, В.А. Плисс нашел достаточные условия того, чтобы число вещественных периодических решений дифференциального уравнения с полиномиальной правой частью относительно неизвестной функции не превосходило степени уравнения.

В связи с построением биологических моделей возникает необходимость построения периодических решений уравнения Бернулли. При этом используется методика исследования, предложенная Н.П. Еругиным в работе [3]. Исследование периодических решений Бернулли представляет интерес в связи с тем, что периодические решения, а значит и соответственно биологические стационарные модели, предшествуют решениям, приводящим к нестационарным состояниям, то есть хаосу.

1. Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + p(x)\, y = q(x) y^n, \qquad (1)$$

где $n = const$, $n \neq 1$.

При $n=1$ уравнение (1) является линейным.

Уравнение (1) приводится к линейному с помощью подстановки

$$u = y^{1-n},\; y = u^{\frac{1}{1-n}}.$$

Подставив значения y и y' в уравнение (1), получим линейное уравнение относительно u

$$u' + (1-n)p(x)u = (1-n)q(x). \qquad (2)$$

Решение уравнения (2) имеет вид [3, стр. 53]:

$$u = e^{(n-1)\int p(x)dx}\left(C + \int (1-n)q(x)e^{(1-n)\int p(x)dx}dx\right),$$

где C – произвольная постоянная.

При $n<1$ $y=0$ будет особым решением уравнения (1), так как оно не может быть получено из общего решения

$$y = \frac{e^{-\int p(x)dx}}{\left(C + \int (1-n)e^{(1-n)\int p(x)dx}dx\right)^{\frac{1}{n-1}}} \qquad (3)$$

ни при каком значении C.

Если $n>1$, то $y=0$ получается из (3) при $C=\infty$.

Равенство (3) можно переписать так:

$$y=\frac{e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)dx}}{\left(y_0+\int\limits_{x_1}^{x}(1-n)q(x)e^{(1-n)\int\limits_{x_0}^{x} p(x)dx}dx\right)^{\frac{1}{n-1}}}, \tag{4}$$

где x_0 и x_1–произвольные, но такие, что интегралы существуют; y_0–произвольная постоянная. Решение уравнения (1) в форме (4) дает решение задачи Коши $y(x_0)=y_0$, если $x_1=x_0$.

Рассмотрим поведение решений уравнения (1) в случае $p(x)=a=const\neq 0$. Тогда (4) примет вид

$$y=e^{-ax}\left[y_0+\int\limits_0^x(1-n)q(x)e^{(1-n)ax}dx\right]^{\frac{1}{1-n}}, x_0=x_1=0. \tag{5}$$

Предположим, что $q(x)$ определена при $x\geq 0$ и такая, что интеграл в (5) существует. Пусть $a>0$. Если $|q(x)|\leq M=const$, то все решения ограничены, так как имеем

$$\left|\int\limits_0^x(1-n)q(x)e^{(1-n)ax}dx\right|\leq M(1-n)\int\limits_0^x e^{(1-n)ax}dx=\frac{M}{a}\left(e^{(1-n)ax}\right)\Big|_0^x=\frac{M}{a}\left(e^{(1-n)ax}-1\right),$$

поэтому

$$|y|\leq\left[|y_0|+\frac{M}{a}\left(e^{(1-n)ax}-1\right)\right]^{\frac{1}{1-n}}\cdot e^{-ax}=$$

$$=\left[\left(|y_0|+\frac{M}{a}\right)e^{-(1-n)ax}+\frac{M}{a}\right]^{\frac{1}{1-n}}\leq\left[|y_0|+\frac{2M}{a}\right]^{\frac{1}{1-n}}.$$

Если $a<0$, то решение (5) возьмем в виде

$$y=e^{-ax}\left[y_0-\int\limits_0^\infty(1-n)q(x)e^{(1-n)ax}dx+\int\limits_0^x(1-n)q(x)e^{(1-n)ax}dx\right]^{\frac{1}{1-n}}. \tag{6}$$

Изменилось лишь значение прежней произвольной постоянной y_0. Так как $a<0$ и $|q(x)|$ ограничен, то интеграл $\int\limits_0^\infty(1-n)q(x)e^{(1-n)ax}dx$ существует при $n<1$. Указанный интеграл расходится при $n>1$.

Учитывая, что

$$\int\limits_0^\infty(1-n)q(x)e^{(1-n)ax}dx-\int\limits_0^x(1-n)q(x)e^{(1-n)ax}dx=\int\limits_x^\infty(1-n)q(x)e^{(1-n)ax}dx,$$

вместо (6) можно написать

$$y = e^{-ax}\left[y_0 + \int\limits_{\infty}^{x}(1-n)q(x)e^{(1-n)ax}dx\right]^{\frac{1}{1-n}} =$$
$$= \left[y_0 \cdot e^{-(1-n)ax} + e^{-(1-n)ax}\int\limits_{\infty}^{x}(1-n)q(x)e^{(1-n)ax}dx\right]^{\frac{1}{1-n}}. \tag{7}$$

Здесь первое слагаемое является неограниченной функцией при $n<1$ и ограниченной при $n>1$. Покажем, что второе слагаемое есть ограниченная функция при $n<1$:

$$\left| e^{-(1-n)ax}\int\limits_{\infty}^{x}(1-n)q(x)e^{(1-n)ax}dx \right| \le e^{-(1-n)ax}M(1-n)\int\limits_{\infty}^{x}e^{(1-n)ax}dx =$$
$$= -\frac{M}{a}e^{-(1-n)ax}e^{(1-n)ax} = -\frac{M}{a} > 0.$$

Поэтому при $a<0$ и $n<1$ уравнение (1) имеет одно ограниченное решение , которое получается из (7) при $y_0=0$.

Пусть в решении (5) или (7) функция $q(x)$ периодическая с периодом ω: $q(x+\omega)=q(x)$. Покажем, что в этом случае уравнение (1) имеет периодическое решение с периодом ω.

Пусть $a<0$ и в (7) $y_0=0$, тогда получим решение

$$y = \left[e^{-(1-n)ax}\int\limits_{\infty}^{x}(1-n)q(\tau)e^{(1-n)a\tau}d\tau\right]^{\frac{1}{1-n}}.$$

Покажем, что $y(x+\omega)=y(x)$.
Действительно, в равенстве

$$y(x+\omega) = \left[e^{-(1-n)a(x+\omega)}\int\limits_{\infty}^{x+\omega}(1-n)q(\tau)e^{(1-n)a\tau}d\tau\right]^{\frac{1}{1-n}}$$

полагаем $\tau = t+\omega$, и учитывая, что $q(x+\omega) = q(x)$, получим

$$y(x+\omega) = \left[e^{-(1-n)ax}e^{-(1-n)a\omega}\int\limits_{\infty}^{x}(1-n)q(t)e^{(1-n)at}e^{(1-n)a\omega}dt\right]^{\frac{1}{1-n}} =$$
$$= \left[e^{-(1-n)ax}\int\limits_{\infty}^{x}(1-n)q(t)e^{(1-n)at}dt\right]^{\frac{1}{1-n}} = y(x),$$

что и надо было показать.

Пусть $a>0$. Функция $q(x)$задана при $x\ge 0$ как периодическая с периодом ω. Решение (5) мы также имеем при $x\ge 0$. Продолжим задание функции $q(x)$ при $x<0$ периодически с периодом ω и определим функцию $q(x)$ равенством $q(-x)= q(x)$, т.е. $q(x)$ определена в промежутке $x<0$ как четная функция. Возьмем решение (7) в виде

$$y = \left[e^{-(1-n)ax}\int\limits_{-\infty}^{x}(1-n)q(\tau)e^{(1-n)a\tau}d\tau\right]^{\frac{1}{1-n}}. \tag{8}$$

Тем самым здесь мы выбрали

$$y_0 = \int\limits_{-\infty}^{0}e^{a\tau}q(\tau)d\tau$$

Введем новую переменную $\tau = t + \omega$, тогда получим

$$y(x+\omega) = \left[e^{-(1-n)ax} e^{-(1-n)a\omega} \int_{-\infty}^{x+\omega} (1-n) q(\tau) e^{(1-n)a\tau} d\tau \right]^{\frac{1}{1-n}} =$$

$$= \left[e^{-(1-n)ax} \int_{-\infty}^{x} (1-n) q(t) e^{(1-n)at} dt \right]^{\frac{1}{1-n}} = y(x).$$

Мы доказали, что решение (8) периодическое.

Литература

1. *Матвеев Н.М.* Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Минск: Вышэйшая школа, 1970.
2. *Плисс В.А*. О числе периодических решений уравнения с полиномиальной правой частью// ДАН СССР, 1959. – Т.127. – № 5. –С 965-968.
3. *Еругин Н.П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – Минск: Наука и техника, 1972.

On periodical solutions the Bernoulli equation

O.P. Sheviakova

The periodical solutions of Bernoulli equations are investigated.

