2002 г. **№7**

Труды ФОРА

О ВЫЧИСЛЕНИИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

А.А. Марданов, Б.А. Самокиш

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург

Дана квадратурная формула для сингулярных интегралов с ядром Коши, основанная на специальной замене переменной, использующей эллиптические функции Якоби и приводящей к интегралу с периодической плотностью, для которого используется формула А.А. Корнейчука. Рассмотрен один вид такой замены, при котором не отбрасываются при интегрировании малые окрестности концов. Получена оценка погрешности, равномерная на отрезке, содержащем все узлы квадратурной формулы и имеющая скорость убывания порядка $O(e^{-a\sqrt{n}})$, n–число узлов. Ввиду этого такая квадратура может быть использована при решении сингулярных интегральных уравнений.

1. Рассмотрим сингулярный интеграл

$$J(t) = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{t-x} dx, \quad t \in (-1,1).$$

Замена $x = \operatorname{sn} u = \operatorname{sn} \frac{2K}{\pi}\theta$, $\quad t = \operatorname{sn}\varphi = \operatorname{sn} \frac{2K}{\pi}\psi$ приводит к интегралу

$$J(\psi) = \frac{K}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\operatorname{sn} \frac{2K}{\pi}\theta) |\operatorname{cn} \frac{2K}{\pi}\theta| \operatorname{dn} \frac{2K}{\pi}\theta}{\operatorname{sn} \frac{2K}{\pi}\psi - \operatorname{sn} \frac{2K}{\pi}\theta} d\theta, \quad \psi \in (0, 2\pi).$$

Представляя, как в [1], $J(\psi)$ в виде

$$J(\psi) = \frac{K}{2\pi \cos\psi} (J^{(2)}(\pi - \psi) - J^{(2)}(\psi)),$$

где

$$J^{(2)}(\psi) = \int_0^{2\pi} F_2(\theta,\psi) \operatorname{ctg} \frac{\theta - \psi}{2} d\theta, \quad F_2(\theta,\psi) = f(\operatorname{sn} \frac{2K}{\pi}\theta) P_2(\theta,\psi),$$

$$P_2(\theta,\psi) = \frac{\sin\psi - \sin\theta}{\operatorname{sn} \frac{2K}{\pi}\psi - \operatorname{sn} \frac{2K}{\pi}\theta} \left|\operatorname{cn} \frac{2K}{\pi}\theta\right| \operatorname{dn} \frac{2K}{\pi}\theta,$$

и применяя для вычисления $J^{(2)}(\psi)$ квадратурную формулу Корнейчука ([2]):

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{ctg} \frac{x-t}{2} dx \approx \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{2n-1} S\Big(\frac{\pi m}{n} - t\Big) f\Big(\frac{\pi m}{n}\Big),$$

получаем формулу

$$J(\psi) \approx J_n(\psi) = \frac{K}{2\pi \cos\psi} (J_n^{(2)}(\pi - \psi) - J_n^{(2)}(\psi)) =$$

$$= \frac{K}{n \cos\psi} \sum_{m=0}^{2n-1} P_2(\theta_m, \psi)(S(\theta_m - \pi + \psi) - S(\theta_m - \psi)) f\Big(\operatorname{sn} \frac{2Km}{n}\Big), \theta_m = \frac{\pi m}{n}. \tag{1}$$

Для остаточного члена формулы (1) справедлива оценка

$$|R(\psi)| \le 4K \sum_{|p| \ge n} |pc_p|. \tag{2}$$

где c_p - коэффициенты Фурье ряда $F_2(\theta,\psi)=\sum_{p\in Z}c_p(\psi)e^{ip\theta}$. Остаточный член формулы (1) оценим в классе функций, допускающих оценку

$$|f(x)|\leq N_1|1-x^2|^{\alpha},\quad 0<\alpha<1. \tag{3}$$

Коэффициенты разложения вычислим сверткой через коэффициенты разложений:

$$f(\operatorname{sn}\frac{2K}{\pi}\theta)\Big|\operatorname{cn}\frac{2K}{\pi}\theta\Big|\operatorname{dn}\frac{2K}{\pi}\theta=\sum_{m\in Z}a_me^{im\theta};\frac{\sin\psi-\sin\theta}{\operatorname{sn}\frac{2K}{\pi}\psi-\operatorname{sn}\frac{2K}{\pi}\theta}=\sum_{m\in Z}b_me^{im\theta},c_l=\sum_{m\in Z}a_{l-m}b_m. \tag{4}$$

2. В этом пункте займемся оценкой коэффициента a_m. В интеграле

$$a_m=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\Big(\operatorname{sn}\frac{2K}{\pi}\theta\Big)\Big|\operatorname{cn}\frac{2K}{\pi}\theta\Big|\operatorname{dn}\frac{2K}{\pi}\theta\exp(-im\theta)d\theta$$

вернемся к переменной $x=\operatorname{sn}\frac{2K}{\pi}\theta=\operatorname{sn}(u+iv)$. Деформируем путь интегрирования, т.е. отрезок $[-1,1]$, в верхнюю ($m<0$) и нижнюю ($m>0$) полуокружности соответственно. Вводя затем независимые переменные $s_1=\operatorname{sn}u, is_2=\operatorname{sn}iv$ и применяя теорему сложения для эллиптического синуса, получаем, что уравнение $|\operatorname{sn}(u+iv)|=1$ в новых переменных запишется в виде $\frac{s_1^2+s_2^2}{1+k^2s_1^2s_2^2}=1$. Следовательно, допустима гладкая параметризация $\rho=s_2$. Используя теоремы сложения для эллиптических функций $\operatorname{cn}u$ и $\operatorname{dn}u$, находим

$$\operatorname{cn}^2(u+iv)=\frac{2\rho^2k'^2}{1-k^2\rho^4},\ \operatorname{dn}^2(u+iv)=k'^2\frac{1+k^2\rho^4}{1-k^2\rho^4},\Big(\frac{d\theta}{dt}\Big)^2=\frac{2(1+k^2\rho^4)}{(1-\rho^4)(1-k^4\rho^4)}. \tag{5}$$

Пусть для определенности $m<0$, обозначим $l=-m$. Разбивая теперь полуокружность точкой i пополам, получаем представление

$$a_{-l}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\Big(\operatorname{sn}\frac{2K}{\pi}\theta\Big)\Big|\operatorname{cn}\frac{2K}{\pi}\theta\Big|\operatorname{dn}\frac{2K}{\pi}\theta\exp(il\theta)d\theta=$$

$$=\frac{1}{2K}\int_{-1}^{1}f(x)\exp\Big(\frac{il\pi}{2K}F(x)\Big)dx=\frac{1}{2K}\Big(\int_{-1}^{i}+\int_i^1\Big),$$

где $F(x)$– эллиптический интеграл 1 рода. Рассмотрим первый интеграл в сумме. Используя (3) и (5), будем иметь

$$\frac{1}{2K}\Big|\int_{-1}^{i}\Big|\leq\frac{k'^2}{2\pi}\int_0^1\frac{|f(\rho)|(1+k^2\rho^4)\rho\exp(\frac{il\pi}{2K}F(i\rho))}{(1-k^2\rho^4)\sqrt{(1-\rho^4)(1-k^4\rho^4)}}d\rho\leq$$

$$\leq\frac{2^{\alpha}N_1k'^{2(\alpha+1)}}{\pi}\int_0^1\frac{\rho^{2\alpha+1}\exp(\frac{-\pi^2l\rho}{8K})}{(1-k^2\rho^4)^{\alpha+1}\sqrt{(1-\rho^4)(1-k^4\rho^4)}}d\rho,$$

так как $F(i\rho)=\int_0^{i\rho}\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}\geq i\int_0^1\frac{d\xi}{1+\xi^2}=\frac{\pi i}{4}$. Второй интеграл оценивается аналогично, так что

$$|a_{-l}|\leq\frac{2^{\alpha+1}N_1k'^{2(\alpha+1)}}{\pi}\int_0^1\frac{\rho^{2\alpha+1}\exp(\frac{-\pi^2l\rho}{8K})}{(1-k^2\rho^4)^{\alpha+1}\sqrt{(1-\rho^4)(1-k^4\rho^4)}}d\rho. \tag{6}$$

Интегрируя по частям, приходим к выражению

$$\int_0^1\frac{\rho^{2\alpha+1}\exp(\frac{-\pi^2l\rho}{8K})}{(1-k^2\rho^4)^{\alpha+1}\sqrt{(1-\rho^4)(1-k^4\rho^4)}}d\rho=\exp\Big(\frac{-\pi^2l}{8K}\Big)\int_0^1\frac{\xi^{2\alpha+1}}{(1-k^2\xi^4)^{\alpha+1}\sqrt{R_1(\xi)}}d\xi+$$

$$+\frac{\pi l}{2K}\int_0^1\int_0^{\rho}\frac{\xi^{2\alpha+1}\exp(\frac{-\pi^2l\rho}{8K})}{(1-k^2\xi^4)^{\alpha+1}\sqrt{R_1(\xi)R_2(\rho)}}d\xi d\rho=\exp\Big(\frac{-\pi^2l}{8K}\Big)I_1+\frac{\pi l}{2K}I_2, \tag{7}$$

где $R_1(\xi)=(1-\xi^4)(1-k^4\xi^4)$, $R_2(\rho)=(1+\rho^2)(1+k^2\rho^2)$. Оценим первый интеграл. Имеем

$$I_1<\int_0^1\frac{\xi^{2\alpha+1}}{(1-k^2\xi^4)^{\alpha+\frac32}\sqrt{1-\xi^4}}d\xi=\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^1\frac{\xi^{2\alpha+1}(-1)^m}{\sqrt{1-\xi^4}}\binom{-\alpha-\frac32}{m}k^{2m}\xi^{4m}d\xi=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m+\alpha+\frac32)}{(\alpha+\frac32)m!}\int_0^1\frac{\xi^{2\alpha+1+4m}k^{2m}}{\sqrt{1-\xi^4}}d\xi=\frac{\sqrt{\pi}}{4\,(\alpha+\frac32)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m+\alpha+\frac32)}{(m+1)}\frac{(m+\frac{\alpha+1}{2})}{(m+\frac{\alpha}{2}+1)}k^{2m}.$$

Сравним этот ряд с биномиальным

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m+\alpha+1)}{(\alpha+1)\,(m+1)}k^{2m}=(1-k^2)^{-\alpha-1}.$$

Для этого оценим отношение одноименных членов:

$$\frac{(m+\alpha+\frac32)}{(m+\alpha+1)}\frac{(m+\frac{\alpha+1}{2})}{(m+\frac{\alpha}{2}+1)}=\frac{(m+\alpha+\frac12)(m+\frac{\alpha-1}{2})}{(m+\alpha)(m+\frac{\alpha}{2})}\frac{(m+\alpha+\frac12)\,(m+\frac{\alpha-1}{2})}{(m+\alpha)\,(m+\frac{\alpha}{2})}=$$

$$=\prod_{n=1}^{m}\frac{(n+\alpha+\frac12)(n+\frac{\alpha-1}{2})}{(n+\alpha)(n+\frac{\alpha}{2})}\frac{(\alpha+\frac32)\,(\frac{\alpha+1}{2})}{(\alpha+1)\,(\frac{\alpha}{2}+1)}<<\frac{(\alpha+\frac32)\,(\frac{\alpha+1}{2})}{(\alpha+1)\,(\frac{\alpha}{2}+1)},$$

поскольку

$$\frac{(n+\alpha+\frac12)(n+\frac{\alpha-1}{2})}{(n+\alpha)(n+\frac{\alpha}{2})}=\frac{(n+\alpha)(n+\frac{\alpha}{2})-\frac{\alpha+1}{4}}{(n+\alpha)(n+\frac{\alpha}{2})}<1,\ 0<\alpha<1.$$

Таким образом,

$$I_1<\frac{\sqrt{\pi}}{4}\frac{(\frac{\alpha+1}{2})}{(\frac{\alpha}{2}+1)}(1-k^2)^{-\alpha-1}. \tag{8}$$

Снова интегрируя по частям второе слагаемое в (7), получаем

$$I_2=\exp\Big(\frac{-\pi^2 l}{8K}\Big)\int_0^1\int_0^{\eta}\frac{\xi^{2\alpha+1}d\xi d\eta}{(1-k^2\xi^4)^{\alpha+1}\sqrt{R_1(\xi)R_2(\eta)}}+$$

$$+\frac{\pi l}{2K}\int_0^1\int_0^{\rho}\int_0^{\eta}\frac{\xi^{2\alpha+1}\exp(\frac{-\pi^2 l\rho}{8K})d\xi d\eta d\rho}{(1-k^2\xi^4)^{\alpha+1}\sqrt{R_1(\xi)R_2(\eta)R_2(\rho)}}=\exp\Big(\frac{-\pi^2 l}{8K}\Big)I_3+\frac{\pi l}{2K}I_4. \tag{9}$$

Применяя к первому слагаемому в (9) интегральную формулу Дирихле, будем иметь

$$I_3=\int_0^1\int_{\xi}^1\frac{\xi^{2\alpha+1}d\xi d\eta}{(1-k^2\xi^4)^{\alpha+1}\sqrt{R_1(\xi)R_2(\eta)}}\le\le\int_0^1\frac{\xi^{2\alpha+1}(1-\xi)}{(1-k^2\xi^4)^{\alpha+1}\sqrt{R_1(\xi)}}d\xi\le\int_0^1\frac{\xi^{2\alpha+1}\sqrt{1-\xi^4}}{(1-k^2\xi^4)^{\alpha+\frac32}}d\xi.$$

Преобразуя последний интеграл, получаем

$$\int_0^1\frac{\xi^{2\alpha+1}\sqrt{1-\xi^4}}{(1-k^2\xi^4)^{\alpha+\frac32}}d\xi=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m+\alpha+\frac32)}{(m+1)\,(\alpha+\frac32)}\int_0^1\xi^{2\alpha+4m+1}\sqrt{1-\xi^4}k^{2m}d\xi=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{8\,(\alpha+\frac32)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m+\alpha+\frac32)\,(m+\frac{\alpha+1}{2})}{(m+1)\,(m+\frac{\alpha}{2}+2)}k^{2m}.$$

Как и выше, сравним этот ряд с биномиальным

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m+\alpha)}{(\alpha)\,(m+1)}k^{2m}=(1-k^2)^{-\alpha}.$$

Здесь отношение одноименных членов таково:

$$\frac{(m+\alpha+\frac{3}{2})\,(m+\frac{\alpha+1}{2})}{(m+\alpha)\,(m+\frac{\alpha}{2}+2)} = = \frac{(m+\alpha+\frac{1}{2})(m+\frac{\alpha-1}{2})}{(m+\alpha-1)(m+\frac{\alpha}{2}+1)}\frac{(m+\alpha+\frac{1}{2})\,(m+\frac{\alpha-1}{2})}{(m+\alpha-1)\,(m+\frac{\alpha}{2}+1)},$$

причем

$$\frac{(m+\alpha+\frac{1}{2})(m+\frac{\alpha-1}{2})}{(m+\alpha-1)(m+\frac{\alpha}{2}+1)} = 1 + \frac{3(1-\alpha)}{4(m+\alpha-1)(m+\frac{\alpha}{2}+1)} > 1,$$

так что отношения образуют возрастающую последовательность. С учетом предельного соотношения $\lim_{|z|\to\infty} e^{-\alpha\ln z}\frac{(z+\alpha)}{(z)} = 1$ заключаем отсюда, что $\frac{(m+\alpha+\frac{3}{2})\,(m+\frac{\alpha+1}{2})}{(m+\alpha)\,(m+\frac{\alpha}{2}+2)} \le 1$. Следовательно,

$$I_3 < \frac{\sqrt{\pi}\,(\alpha)}{8\,(\alpha+\frac{3}{2})}(1-k^2)^{-\alpha}. \tag{10}$$

Оценим теперь второе слагаемое в (9). Имеем

$$I_4 \le \int_0^1\int_0^\rho\int_0^\eta \frac{\xi^{2\alpha+1}\exp(\frac{-\pi^2 l\rho}{8K})}{\sqrt{R_1(\xi)R_2(\xi)(1-k^2\xi^4)^{\alpha+1}}}d\xi d\eta d\rho = \int_0^1\int_0^\rho\int_0^\eta \frac{\xi^{2\alpha+1}\exp(\frac{-\pi^2 l\rho}{8K})d\xi d\eta d\rho}{\sqrt{R_3(\xi)R_4(\xi)R_5(\xi)R_6(\xi)(1-k^2\xi^4)^{\alpha}}} \le$$

$$\le \int_0^1\int_0^\rho\int_0^\eta \frac{\xi^{2\alpha+1}\exp(\frac{-\pi^2 l\rho}{8K})d\xi d\eta d\rho}{(1-\xi^8)^2(1-k^2\xi^4)^{\alpha}} \le 2^\alpha \int_0^1\int_0^\rho\int_0^\eta \frac{\xi^{2\alpha+1}\exp(\frac{-\pi^2 l\rho}{8K})d\xi d\eta d\rho}{(1-\xi^8)^{\alpha+2}}, \tag{11}$$

поскольку

$$R_i(\xi) \ge 1-\xi^8, i=3,4,5,6,$$

где

$$R_3(\xi) = \sqrt{(1+\xi^2)(1-\xi^4)},\ R_4(\xi) = \sqrt{(1+k^2\xi^2)(1-k^4\xi^4)},$$
$$R_5(\xi) = \sqrt{(1+\xi^2)(1-k^2\xi^4)},\ R_6(\xi) = \sqrt{(1+k^2\xi^2)(1-k^2\xi^4)}.$$

Теперь заметим, что

$$\int_0^\rho\int_0^\eta \frac{\xi^{2\alpha+1}}{(1-\xi^8)^{\alpha+2}}d\xi d\eta = \sum_{n=0}^\infty \frac{(n+\alpha)(n+\alpha+1)\,(n+\alpha)\rho^{8n}}{\alpha(\alpha+1)\,(\alpha)(8n+2\alpha+2)(8n+2\alpha+3)n!} \le$$

$$\le C_\alpha^{(1)}\rho^{2\alpha+3}\sum_{m=0}^\infty \frac{(n+\alpha)}{(\alpha)n!}\rho^{8n} \le C_\alpha^{(1)}\rho^{2\alpha+3}(1-\rho^8)^{-\alpha},$$

где $C_\alpha^{(1)} = \frac{1}{\alpha(\alpha+1)}max_{n\in Z_+}\frac{(n+\alpha)(n+\alpha+1)}{(8n+2\alpha+2)(8n+2\alpha+3)} = \frac{1}{2(\alpha+1)(2\alpha+3)}$. Таким образом, требуется оценить интеграл $\int_0^1 \frac{\rho^{2\alpha+3}}{(1-\rho^8)^{-\alpha}}\exp\Big(\frac{-\pi^2 l\rho}{8K}\Big)d\rho$. Имеем

$$\int_0^1 \rho^{2\alpha+3}(1-\rho^8)^{-\alpha}\exp\Big(\frac{-\pi^2 l\rho}{8K}\Big)d\rho = \int_0^1 \exp\Big(\frac{-\pi^2 l\rho}{8K}\Big)du(\rho),$$

$$u(\rho) = \int_0^\rho z^{2\alpha+3}(1-z^8)^{-\alpha}dz = \sum_{m=0}^\infty \frac{(m+\alpha)}{(\alpha)m!}\int_0^\rho z^{8m+2\alpha+3}dz =$$

$$= \sum_{m=0}^\infty \frac{(m+\alpha)}{(\alpha)m!}\frac{1}{(8m+2\alpha+4)}\rho^{8m+2\alpha+4} < C_\alpha^{(2)}\sum_{m=0}^\infty \frac{(m+\alpha)}{(\alpha)(m+1)!}\rho^{8m+2\alpha+4} =$$

$$= C_\alpha^{(2)}\rho^{2\alpha+4}\sum_{m=0}^\infty \frac{(m+\alpha)}{(\alpha)(m+1)!}\rho^{8m} = C_\alpha^{(2)}\rho^{2\alpha-4}\frac{(\alpha-1)}{(\alpha)}\sum_{m=1}^\infty \frac{(m+\alpha-1)}{(\alpha-1)m!}\rho^{8m} =$$

$$= \frac{C_\alpha^{(2)}\rho^{2\alpha-4}}{\alpha-1}\Big(\sum_{m=0}^\infty \frac{(m+\alpha-1)}{(\alpha-1)m!}\rho^{8m} - 1\Big) = C_\alpha^{(2)}\frac{\rho^{2\alpha+4}}{1-\alpha}\Big(\frac{1-(1-\rho^8)^{1-\alpha}}{\rho^8}\Big) \le C_\alpha^{(2)}\frac{\rho^{2\alpha+4}}{1-\alpha},$$

где $C_\alpha^{(2)} = \max_{m\in Z_+} \frac{m+1}{8m+2\alpha+4} = \frac{1}{2\alpha+4}$. Итак, $u(\rho) \le \frac{\rho^{2\alpha+4}}{(2\alpha+4)(1-\alpha)}$, откуда

$$\rho \ge \Big((2\alpha+4)(1-\alpha)u(\rho)\Big)^{\frac{1}{2\alpha+4}}$$

.

Положим

$$v(\rho) = \Big((2\alpha+4)(1-\alpha)u(\rho)\Big)^{\frac{1}{2\alpha+4}},$$

тогда

$$\int_0^1 \exp\Big(\frac{-\pi^2 l\rho}{8K}\Big)du(\rho) \le \int_0^1 \exp\Big(\frac{-\pi^2 l}{8K}v(\rho)\Big)du(\rho) = \frac{1}{1-\alpha}\int_0^{v(1)} \exp\Big(\frac{-\pi^2 l}{8K}v(\rho)\Big)(v(\rho))^{2\alpha+3}dv(\rho) <$$

$$< \frac{1}{1-\alpha}\Big(\frac{8K}{\pi^2 l}\Big)^{2\alpha+4}\int_0^\infty e^{-x}x^{2\alpha+3}dx = \frac{1}{1-\alpha}\Big(\frac{8K}{\pi^2 l}\Big)^{2\alpha+4}(2\alpha+4).$$

Подставляя полученную оценку в (11), получаем

$$I_4 \le \frac{2^{\alpha-1}}{1-\alpha^2}\Big(\frac{8K}{\pi^2 l}\Big)^{2\alpha+4}(2\alpha+3). \tag{12}$$

Случай $l > 0$ рассматривается аналогично. Подставляя (10) и (12) в (9), (8) и (9) в (6), приходим к оценке

$$|a_l| \le \frac{2^{\alpha+1}N_1}{\pi}\left(C_1\exp\Big(\frac{-\pi^2|l|}{8K}\Big)+C_2\exp\Big(\frac{-\pi^2|l|}{8K}\Big)|l|k'^2+\frac{C_3 k'^{2(\alpha+1)}}{|l|^{2\alpha+2}}\right), \tag{13}$$

где $C_1 = \frac{\sqrt{\pi}\,(\frac{\alpha+1}{2})}{4\,(\frac{\alpha}{2}+1)}$, $C_2 = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}\,(\frac{\alpha+1}{2})}{16K\,(\frac{\alpha}{2}+2)}$, $C_3 = \frac{2^{7\alpha+9}K^{2\alpha+2}}{(1-\alpha^2)\pi^{4\alpha+6}}(2\alpha+3)$. Полагая в (6) $l=0$, находим

$$|a_0| \le \frac{2^{\alpha-1}N_1\,(\frac{\alpha+1}{2})}{\sqrt{\pi}\,(\frac{\alpha}{2}+1)}. \tag{14}$$

3. Оценим теперь коэффициент b_l. Используя представление

$$b_l = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\psi - \sin\xi}{\operatorname{sn}\frac{2K}{\pi}\psi - \operatorname{sn}\frac{2K}{\pi}\xi}\exp(-il\xi)d\xi = = \frac{1}{2\pi}\Big\{\tilde\Phi_l(\psi)\sin\psi - \frac{1}{2i}(\tilde\Phi_{l-1}(\psi) - \tilde\Phi_{l+1}(\psi))\Big\},$$

$$\tilde\Phi_l(\psi) = \int_0^{2\pi}\frac{\exp(-il\xi)d\xi}{\operatorname{sn}\frac{2K}{\pi}\psi - \operatorname{sn}\frac{2K}{\pi}\xi},$$

и вычисляя, как в [1], интеграл $\tilde\Phi_l(\psi)$ получаем

$$\tilde\Phi_l(\psi) = \begin{cases} \frac{\pi^2}{K\operatorname{cn}\frac{2K}{\pi}\psi\operatorname{dn}\frac{2K}{\pi}\psi}\sin l\psi\operatorname{th}\frac{\pi l K'}{2K}, & l = 2p, \\ \frac{i\pi^2}{K\operatorname{cn}\frac{2K}{\pi}\psi\operatorname{dn}\frac{2K}{\pi}\psi}\cos l\psi\operatorname{th}\frac{\pi l K'}{2K}; & l = 2p-1, \end{cases}$$

откуда находим для $l = 2p$:

$$b_l = \frac{\pi\cos\psi\operatorname{th}\frac{\pi K'}{2K}(1-\operatorname{th}^2\frac{\pi l K'}{2K})}{4K\operatorname{cn}\frac{2K}{\pi}\psi\operatorname{dn}\frac{2K}{\pi}\psi(1-\operatorname{th}^2\frac{\pi l K'}{2K}\operatorname{th}^2\frac{\pi K'}{2K})}\times\Big\{\Big(1+\operatorname{th}\frac{\pi K'}{2K}\operatorname{th}\frac{\pi l K'}{2K}\Big)\frac{\cos(l-1)\psi}{\cos\psi}+$$

$$+\Big(1-\operatorname{th}\frac{\pi K'}{2K}\operatorname{th}\frac{\pi l K'}{2K}\Big)\frac{\cos(l+1)\psi}{\cos\psi}\Big\},$$

для $l = 2p-1$:

$$b_l = -\frac{\pi i\cos\psi\operatorname{th}\frac{\pi K'}{2K}(1-\operatorname{th}^2\frac{\pi l K'}{2K})}{4K\operatorname{cn}\frac{2K}{\pi}\psi\operatorname{dn}\frac{2K}{\pi}\psi(1-\operatorname{th}^2\frac{\pi l K'}{2K}\operatorname{th}^2\frac{\pi K'}{2K})}\times\Big\{\Big(1+\operatorname{th}\frac{\pi K'}{2K}\operatorname{th}\frac{\pi l K'}{2K}\Big)\frac{\sin(l-1)\psi}{\cos\psi}+$$

$$+\Big(1-\operatorname{th}\frac{\pi K'}{2K}\operatorname{th}\frac{\pi l K'}{2K}\Big)\frac{\sin(l+1)\psi}{\cos\psi}\Big\}.$$

Повторяя рассуждения, приведенные в [1], с учетом неравенства

$$\operatorname{dn}\Big(\frac{2K}{\pi}\psi\Big)=\sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2\frac{2K}{\pi}\psi}\geq k',$$

получаем оценки

$$|b_0|\leq\frac{\pi^2}{4K}\Big(\frac{K'}{kK}\Big)^2,\ |b_l|\leq\frac{\pi K'}{(Kk')^2}\operatorname{sh}\Big(\frac{\pi K'}{K}\Big)\exp\Big(\frac{-\pi^2}{2K}|l|\Big)|l|. \tag{15}$$

4. Подставляя (13),(14) и (15) в (4), находим

$$|c_l|\leq|a_lb_0|+\sum_{m\in Z,m\neq0,l}|a_{l-m}b_m|+|a_0b_l|\leq\frac{2^{\alpha-1}N_1K'}{(Kk')^2}\times$$

$$\times\Big\{\frac{\pi K'}{K}\Big(C_1\exp\Big(\frac{-\pi^2|l|}{8K}\Big)+C_2\exp\Big(\frac{-\pi^2|l|}{8K}\Big)|l|k'^2+\frac{C_3k'^{2(\alpha+1)}}{|l|^{2\alpha+2}}\Big)+$$

$$+4\operatorname{sh}\Big(\frac{\pi K'}{K}\Big)\sum_{m\in Z,m\neq0,l}\Big(C_1\exp\Big(\frac{-\pi^2|l-m|}{8K}-\frac{\pi^2|m|}{2K}\Big)|m|+$$

$$+C_2\exp\Big(\frac{-\pi^2|l-m|}{8K}-\frac{\pi^2|m|}{2K}\Big)|(l-m)m|k'^2+$$

$$+\frac{C_3k'^{2(\alpha+1)}\exp\Big(-\frac{\pi^2|m|}{2K}\Big)|m|}{|l-m|^{2\alpha+2}}\Big)+\frac{\sqrt{\pi}\,(\frac{\alpha+1}{2})}{(\frac{\alpha}{2}+1)}\operatorname{sh}(\frac{\pi K'}{K})\exp(\frac{-\pi^2}{2K}|l|)|l|\Big\}. \tag{16}$$

Пусть для определенности $l>0$, обозначим $\beta=\frac{\pi^2}{8K}$, $\gamma=\frac{\pi^2}{2K}$. Используя оценку (17) из [1], получим

$$\sum_{m\in Z,m\neq0,l}\exp(-\beta|l-m|-\gamma|m|)|m|\leq\exp(-\beta l)\Big(\frac{2752K^2}{225\pi^4}+(1+\frac{8K}{5\pi^2})l\Big)=$$

$$=\exp\Big(\frac{-\pi^2l}{8K}\Big)(D_1^{(1)}+D_2^{(1)}l). \tag{17}$$

Используя оценки (18) и (21) из [1], будем иметь

$$\sum_{m\in Z,m\neq0,l}\exp(-\beta|l-m|-\gamma|m|)|(l-m)m|\leq\exp(-\beta l)\Big(\frac{2048K^3}{125\pi^6}+\frac{2752K^2}{225\pi^4}l\Big)=$$

$$=\exp\Big(\frac{-\pi^2l}{8K}\Big)(D_1^{(2)}+D_2^{(2)}l). \tag{18}$$

Подставляя (17) (18) в (16), после некоторых преобразований получаем оценку

$$|c_l|\leq\frac{2^{\alpha-1}N_1K'}{(Kk')^2}\times\Big\{\frac{\pi K'}{K}\Big(C_1\exp\Big(\frac{-\pi^2|l|}{8K}\Big)+C_2\exp\Big(\frac{-\pi^2|l|}{8K}\Big)|l|k'^2+\frac{C_3k'^{2(\alpha+1)}}{|l|^{2\alpha+2}}\Big)+$$

$$+4\operatorname{sh}\Big(\frac{\pi K'}{K}\Big)\Big(C_1D^{(1)}\exp\Big(\frac{-\pi^2|l|}{8K}\Big)+C_2D^{(2)}\exp\Big(\frac{-\pi^2|l|}{8K}\Big)k'^2+$$

$$+C_3k'^{2(\alpha+1)}\sum_{m\in Z,m\neq0,l}\frac{\exp\Big(-\frac{\pi^2|m|}{2K}\Big)|m|}{|l-m|^{2\alpha+2}}\Big)+\frac{\sqrt{\pi}\,(\frac{\alpha+1}{2})}{(\frac{\alpha}{2}+1)}\operatorname{sh}(\frac{\pi K'}{K})\exp\Big(\frac{-\pi^2}{2K}|l|\Big)|l|\Big\}, \tag{19}$$

Подставляя (19) в (2), будем иметь

$$|R| \leq \frac{2^{\alpha+1}N_1K'^2}{(Kk')^2} \times \Big\{\pi \sum_{|p|\geq n}\Big(C_1\exp\Big(\frac{-\pi^2|p|}{8K}\Big)|p| + C_2\exp\Big(\frac{-\pi^2|p|}{8K}\Big)p^2k'^2 + \frac{C_3k'^{2(\alpha+1)}}{|p|^{2\alpha+1}}\Big)+$$

$$+\frac{4K}{K'}\operatorname{sh}\Big(\frac{\pi K'}{K}\Big)\Big(\sum_{|p|\geq n}\Big(C_1(D_1^{(1)}|p| + D_2^{(1)}p^2) + C_2(D_1^{(2)}|p| + D_2^{(2)}p^2)k'^2\Big)\exp\Big(\frac{-\pi^2|p|}{8K}\Big)+$$

$$+C_3k'^{2(\alpha+1)}\sum_{|p|\geq n}\sum_{m\in Z, m\neq 0,p}\frac{\exp\Big(\frac{-\pi^2|m|}{2K}\Big)|mp|}{|p-m|^{2\alpha+2}}\Big) + \frac{\sqrt{\pi}\,(\frac{\alpha+1}{2})}{(\frac{\alpha}{2}+1)}\operatorname{sh}\Big(\frac{\pi K'}{K}\Big)\sum_{|p|\geq n}\exp\Big(\frac{-\pi^2|p|}{2K}\Big)p^2\Big\}, \quad (20)$$

Заметим теперь, что в силу формул (22) и (23) из [1]

$$\sum_{|p|\geq n}\exp\Big(\frac{-\pi^2|p|}{8K}\Big)|p| \leq D_n^{(1)}\exp\Big(\frac{-\pi^2 n}{8K}\Big), D_n^{(1)} = \frac{64K^2}{\pi^4} + \Big(1+\frac{8K}{\pi^2}\Big)n,$$

$$\sum_{|p|\geq n}\exp\Big(\frac{-\pi^2|p|}{8K}\Big)p^2 \leq D_n^{(2)}\exp\Big(\frac{-\pi^2 n}{8K}\Big),$$

$$D_n^{(2)}=\frac{1024K^3}{\pi^6}+\frac{128K^2n}{\pi^4}+\Big(1+8\frac{K}{\pi^2}\Big)n^2, \quad \sum_{|p|\geq n}|p|^{-2\alpha-1} \leq 2\zeta(2\alpha+1),$$

для двойной суммы в (20) используем оценку $|mp| \leq |m(p-m)| + m^2$, тогда

$$\sum_{|p|\geq n}\sum_{m\in Z, m\neq 0,p}\frac{\exp\Big(\frac{-\pi^2|m|}{2K}\Big)|mp|}{|p-m|^{2\alpha+2}} \leq \sum_{q\in Z, q\neq 0}|q|^{-2\alpha-1}\sum_{m\in Z}\exp\Big(\frac{-\pi^2|m|}{2K}\Big)|m|+$$

$$+\sum_{q\in Z, q\neq 0}|q|^{-2\alpha-2}\sum_{m\in Z}\exp\Big(\frac{-\pi^2|m|}{2K}\Big)m^2 \leq \exp\Big(\frac{-\pi^2 n}{2K}\Big)D_n^{(4)}\zeta(2\alpha+1), D_n^{(4)} = \frac{32K^3}{\pi^6}.$$

Используя полученные оценки, находим из (20)

$$|R| \leq \frac{2^{\alpha+1}N_1K'^2}{(Kk')^2}\Big\{\pi\Big(E_n^{(1)}\exp\Big(\frac{-\pi^2 n}{8K}\Big) + E_n^{(2)}k'^{2\alpha+2}+$$

$$+\frac{4K'}{K}\operatorname{sh}\Big(\frac{\pi K'}{K}\Big)\Big(E_n^{(3)}\exp\Big(\frac{-\pi^2 n}{8K}\Big) + E_n^{(4)}k'^{2\alpha+2}\exp\Big(\frac{-\pi^2 n}{2K}\Big)\Big) + E_n^{(5)}\exp\Big(\frac{-\pi^2 n}{8K}\Big)\Big\}, \quad (21)$$

где

$$E_n^{(1)} = C_1D_n^{(1)} + C_2D_n^{(2)}k'^2, \; E_n^{(2)} = 2C_3\zeta(2\alpha+1),$$

$$E_n^{(3)} = C_1\Big(D_1^{(1)}D_n^{(1)} + D_2^{(1)}D_n^{(2)}\Big) + C_2\Big(D_1^{(2)}D_n^{(1)} + D_2^{(2)}D_n^{(2)}\Big)k'^2,$$

$$E_n^{(4)} = C_3D_n^{(4)}\zeta(2\alpha+1), \; E_n^{(5)} = \frac{K}{K'}\sqrt{\pi}\frac{(\frac{\alpha+1}{2})}{(\frac{\alpha}{2}+1)}\operatorname{sh}\Big(\frac{\pi K'}{K}\Big)D_n^{(2)}.$$

Выбирая k из условия $\frac{\pi K' n}{4K} = \frac{(2\alpha+2)\pi K}{2K'}$, находим $\frac{K'}{K} = 2\sqrt{\frac{\alpha+1}{n}}$.

Имеем теперь $\exp\Big(\frac{-\pi^2 n}{8K}\Big) = \exp\Big(\frac{-\pi K' n}{4K}\Big)\exp\Big(\frac{\pi}{4K}(K'-\frac{\pi}{2})n\Big)$. С учетом формулы (26) работы [1] $k' \leq 4\exp\Big(\frac{-\pi K}{2K'}\Big)$. Кроме того, в дальнейшем будем считать $n \geq 8$, что приводит к неравенству $\frac{K'}{K} \leq 1$, а в этом случае $K' \leq 1.854$, $\frac{\pi}{8}\sqrt{2n} \leq K \leq \sqrt{n}$. Далее,

$$K' = \frac{\pi}{2}\theta_3^2(0|h') = \frac{\pi}{2}(1+2\sum_{m=1}^{\infty}h'^{n^2})^2 = \frac{\pi}{2}(1+2h's),$$

$$s = \sum_{m=1}^{\infty} {h'}^{n^2-1}, \quad K' - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(4h's + 4{h'}^2 s^2) = 2\pi h'(s + h's^2) \le dh',$$

где

$$d = 2\pi(\tilde{s} + \exp(-\pi)\tilde{s}^2),$$

$$\tilde{s} = \sum_{m=1}^{\infty} \exp(-\pi(n^2-1)) \le \sum_{m=1}^{\infty} \exp(-\pi(n-1)) = 1.041,$$

поскольку $h' = \exp(\frac{-\pi K}{K'}) \le \exp(-\pi)$.

Учитывая, что

$$\frac{1}{K} = \frac{2}{K'}\sqrt{\frac{\alpha+1}{n}} \le \frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{\alpha+1}{n}}$$

,

получаем

$$\exp(\frac{\pi}{4K}(K' - \frac{\pi}{2})n) \le \exp(\sqrt{(\alpha+1)n}h'd).$$

Обозначим $\sqrt{n}h' = \exp\Big(-\frac{\pi}{2}\sqrt{(\alpha+1)n}\Big)\sqrt{n} = \varphi(n)$. Функция $\varphi(n)$ монотонно убывает по n, и из сделанных выше предположений заключаем отсюда, что $\varphi(n) \le \varphi(8) \le 0.033$. Следовательно,

$$\exp(\frac{\pi}{4K}(K' - \frac{\pi}{2})n) \le \exp(\sqrt{2} \cdot 0.033 \cdot 1.041) \le 1.05.$$

Наконец,

$$\frac{1}{k'^2} < \frac{1}{4}\exp\Big(\frac{\pi K}{K'}\Big)\exp\Big(4\exp\Big(\frac{-\pi K}{K'}\Big)\Big) < 0.3\exp\Big(\frac{\pi K}{K'}\Big).$$

Подставляя полученные оценки в (21) и подчиняя младшие члены старшим при $n \ge 8$, получаем окончательно

$$|R| \le C_n \exp\Big(\frac{-\pi\alpha}{2}\sqrt{\frac{n}{\alpha+1}}\Big),$$

$$C_n = 0.3N_1(\alpha+1)2^{\alpha+3}\Bigg\{\pi\Big(C\tilde{E}_n^{(1)} + 16^{\alpha+1}\tilde{E}_n^{(2)}\Big) + \; + 8\sqrt{\alpha+1}\,\mathrm{sh}\Big(2\pi\sqrt{\frac{\alpha+1}{n}}\Big)\Bigg(C\tilde{E}_n^{(3)} +$$

$$+\tilde{E}_n^{(4)}16^{\alpha+1}\exp\Big(\frac{-\pi^2\sqrt{n}}{2}\Big)\Bigg) + C\tilde{E}_n^{(5)}\Bigg\},$$

где $C = 1.05$,

$$\tilde{E}_n^{(1)} = \frac{\sqrt{\pi}\,(\frac{\alpha+1}{2})}{(\frac{\alpha}{2}+1)}\Big(0.41 + 0.21n^{\frac{1}{2}}\Big) + \frac{4\sqrt{2\pi}\,(\frac{\alpha+1}{2})\exp\Big(\frac{-\pi}{2}\sqrt{\frac{n}{2}}\Big)}{(\frac{\alpha}{2}+2)} \times \Big(1.06 + 1.63n\Big),$$

$$\tilde{E}_n^{(2)} = \frac{2^{10+7\alpha}n^{\alpha}}{(1-\alpha^2)\pi^{4\alpha+6}}\,(2\alpha+3)\zeta(2\alpha+1),$$

$$\tilde{E}_n^{(3)} = \frac{\sqrt{\pi}\,(\frac{\alpha+1}{2})}{(\frac{\alpha}{2}+1)}\Big(0.52 + 0.14n^{\frac{3}{2}}\Big) + \frac{4\sqrt{2\pi}\,(\frac{\alpha+1}{2})}{(\frac{\alpha}{2}+2)}\exp\Big(\frac{-\pi}{2}\sqrt{\frac{n}{2}}\Big) \times \Big(0.22n^{\frac{1}{2}} + 0.28n^{\frac{3}{2}}\Big),$$

$$\tilde{E}_n^{(4)} = \frac{0.03 \cdot 2^{9+7\alpha}n^{\alpha+1}}{(1-\alpha^2)\pi^{4\alpha+6}}\,(2\alpha+3)\zeta(2\alpha+1),$$

$$\tilde{E}_n^{(5)} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha+1}}\frac{(\frac{\alpha+1}{2})}{(\frac{\alpha}{2}+1)}\Big(0.53n + 0.81n^2\Big) \times \mathrm{sh}\Big(2\pi\sqrt{\frac{\alpha+1}{n}}\Big).$$

Литература

1. *Марданов А.А., Самокиш Б.А.* О вычислении сингулярных интегралов.I. // Вестник С.-Петерб. ун-та (в печати)

2. *Корнейчук А.А.* Квадратурные формулы для сингулярных интегралов // Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. М., 1964. С. 64–74.

On calculation of the singular integrals

A.A.Mardanov, B.A.Samokish

For the singular integrals with Cauchy's kernel segment of integration, new quadrature rule is given based on the specifical substitution of variable using Jacobi's elliptical functions. One type of that substitution considered at which small neighborhoods of the ends are not thrown aside under integration. Uniform estimate on the segment containing all the knots of quadrature received with the order $O(e^{-a\sqrt{n}})$, $n-$ number of knots.

