О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ, ПОРОЖДЕННЫХ КОММУТИРУЮЩИМИ ЛИНЕЙНЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

С.К. Куижева

Майкопский государственный технологический институт, Майкоп

В этой статье рассматриваются дифференциальные уравнения в частных производных, порожденные коммутирующими линейными дифференциальными операторами.

В работе [1] решается задача о построении уравнений нулевой кривизны с помощью дифференциальных операторов от одной образующей. Выяснилось, что коммутирующие дифференциальные операторы от произвольного числа образующих также порождают некоторые важные в приложениях дифференциальные уравнения, в частности, такие, как линейные дифференциальные уравнения в частных производных, уравнение вынужденных затухающих малых колебаний, если затухание пропорционально квадрату скорости при вынужденной силе, уравнение Риккати, уравнение типа Эмдена-Фаулера [2].

Рассмотрим дифференциальные операторы

$$P=\sum_{i=1}^{n}u_i\partial_x^i\partial_y^{n-i} \qquad L=\sum_{j=1}^{m}v_j\partial_x^j\partial_y^{n-j},$$

где u_i и v_j – некоторые гладкие функции, $i=1,\dots,n;\ j=1,\dots,m$.
Действие оператора ∂^n на функцию v определяется следующей формулой:

$$\partial^n\circ v=v^{(n)}+C_n^1v^{(n-1)}\cdot\partial+\ldots+C_n^kv^{(n-k)}\partial^k+\ldots+\partial^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kv^{(n-k)}\partial^k,$$

$$\partial_y^{n-i}\circ v_j=\sum_{k=0}^{n-i}C_{n-i}^kv_{jy}^{(n-i-k)}\cdot\partial_y^k.$$

Действие оператора ∂^n на сумму определяется следующей формулой:

$$\partial_y^{n-i}\circ\sum_{j=1}^{m}v_j\partial_x^j\partial_y^{m-j}=\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=0}^{n-i}C_{n-i}^kv_{jy}^{(n-i-k)}\cdot\partial_y^k\right)\partial_x^j\partial_y^{m-j},$$

$$\partial_x^i\circ\left[\partial_y^{n-i}\circ\sum_{j=1}^{m}v_j\partial_x^j\partial_y^{m-j}\right]=\partial_x^i\circ\sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{k=0}^{n-i}C_{n-i}^kv_{jy}^{(n-i-k)}\partial_y^k\right]\partial_x^j\partial_y^{m-j}=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{k=0}^{n-i}C_{n-i}^k\left(\sum_{l=0}^{i}C_i^l\left[v_{jy}^{(n-i-k)}\right]_x^{(i-l)}\partial_x^l\right)\partial_y^k\right]\partial_x^j\partial_y^{m-j}.$$

Вычислим действие оператора P на оператор L:

$$P\circ L=\sum_{i=1}^{n}u_i\partial_x^i\partial_y^{n-i}\circ\sum_{j=1}^{m}v_j\partial_x^j\partial_y^{n-j},$$

$$P\circ L=\sum_{i=1}^{n}u_i\sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{k=0}^{n-i}C_{n-i}^{k}\left(\sum_{l=0}^{i}C_i^l\left[v_{jy}^{(n-i-k)}\right]_x^{(i-l)}\partial_x^l\right)\cdot\partial_y^k\right]\partial_k^j\partial_y^{m-j}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{n-i}\sum_{l=0}^{i}u_iC_{n-i}^{k}C_i^l v_{jy^{n-i-k}x^{i-l}}^{(n-k-l)}\cdot\partial_y^{k+m-j}\cdot\partial_x^j$$

Аналогично вычислим действие оператора L на оператор P:

$$L\circ P=\sum_{j=1}^{m}v_j\partial_x^j\partial_y^{m-j}\circ\sum_{i=1}^{n}u_i\partial_x^i\partial_y^{n-i},$$

с учетом следующих преобразований:

$$\partial_y^{m-j}\circ\sum_{i=1}^{n}u_i\partial_x^i\partial_y^{n-i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=0}^{m-j}C_{m-j}^{p}u_{iy}^{(m-j-p)}\partial_y^p\partial_x^i\partial_y^{n-i}$$

$$\partial_x^j\circ\left[\partial_y^{m-j}\circ\sum_{i-1}^{n}u_i\partial_x^i\partial_y^{n-i}\right]=\partial_y^j\circ\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=0}^{m-j}C_{m-j}^{p}\cdot u_{iy}^{(m-j-p)}\partial_y^p\cdot\partial_x^i\partial_y^{n-i}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=0}^{m-j}C_{m-j}^{p}\left[\sum_{q=0}^{j}C_j^q\left[u_{iy}^{(m-j-p)}\right]_x^{(j-q)}\right]\partial_y^p\cdot\partial_x^i\cdot\partial_y^{n-i}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=0}^{m-j}\sum_{q=0}^{j}C_{m-j}^{p}\cdot C_j^q u_{iy^{m-j-p}x^{j-q}}^{(m-j-p+j-q)}\cdot\partial_y^{p+n-i}\cdot\partial_x^i=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=0}^{m-j}\sum_{q=0}^{j}C_{m-j}^{p}\cdot C_j^q u_{iy^{m-j-p}x^{j-q}}^{(m-p-q)}\cdot\partial_y^{p+n-i}\cdot\partial_x^i$$

Следовательно, получаем действие оператора L на оператор P:

$$L\circ P=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=0}^{m-j}\sum_{q=0}^{j}v_jC_{m-j}^{p}\cdot C_j^q u_{iy^{m-j-p}x^{j-q}}^{(m-p-q)}\cdot\partial_y^{p+n-i}\cdot\partial_x^i$$

Таким образом, можно вычислить коммутатор операторов L и P:

$$P\circ L-L\circ P=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{n-j}\sum_{l=0}^{j}u_jC_{n-i}^{k}\cdot C_i^l v_{jy^{n-i-k}x^{i-l}}^{(n-k-l)}\cdot\partial_y^{k+m-j}\cdot\partial_x^j-$$

$$-\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=0}^{m-j}\sum_{q=0}^{j}v_jC_{m-j}^{p}C_j^q u_{iy^{m-j-p}x^{j-q}}^{(m-p-q)}\cdot\partial_y^{p+n-i}\cdot\partial_x^i$$

Условие $P\circ L-L\circ P=0$ порождает ряд известных дифференциальных уравнений.

Пример 1. Рассмотрим дифференциальные операторы второго порядка.

$$P=\partial_x^2+\partial_y^2+b_1\partial_x+c_1\partial_y+u,$$

$$L=a_2\partial_x+b_2\partial_y+v,$$

где a_2, b_2, b_1, c_2, u, v – некоторые гладкие функции.

Условие $[P,L]=0$ равносильно системе уравнений:

$$a_{2x}=0,\ b_{2y}=0,\ a_{2xx}+v_x=0,\ b_{2x}=0,\ 3b_{2x}+a_{2y}=0,$$

$$a_{2xxx}+3v_{xx}+a_{2yy}+b_1a_{2y}+c_1b_{2x}-a_2c_{1x}-b_2c_{1y}=0,$$

$$b_{2xxx}+b_{2yy}+2v_y+b_1b_{2y}+c_1b_{2x}-a_2b_{1x}-b_2b_{1y}=0,$$

$$v_{xxx}+v_{yy}+b_1v_y+c_1v_x-a_2u_x-b_2u_y=0.$$

После преобразования системы находим:

$$a_2=k_1,\ b_2=k_2,\ v=k_3(y),\ c_1=c_1(k_1x+k_2y),\ b_1=\varphi(x,y),$$

$$k_1\varphi_x+k_2\varphi_y=2k_3(y),$$

$$2u = \varphi_y + 1/2\varphi^2 - f(k_1x - k_2y),$$

где f – произвольная гладкая функция.

Пример 2. Рассмотрим дифференциальные операторы второго порядка.

$$P = \partial_x^2 + \partial_y^2 + a_1\partial_x + b_1\partial_y + a_0,$$

$$L = \partial_x\partial_y + a_2\partial_y + b_2\partial_x + b_0,$$

где $a_2, b_2, a_1, b_1, a_0, b_0$ – некоторые гладкие функции.

Условие $[P,L]=0$ равносильно системе уравнений:

$$2b_{2x} - b_{1x} = 0,\quad 2a_{2y} - a_{1x} = 0,\quad 2a_{2y} + 2b_{2y} - a_{1y} - b_{1x} = 0,$$

$$b_{2xx} + 2b_{0x} + b_{2yy} + a_1b_{2y} + b_1b_{2y} - b_{1xy} - a_{0y} - a_2b_{1y} - b_2b_{1x} = 0,$$

$$a_{2xx} + 2b_{0y} + a_{2yy} + a_1a_{2y} + a_1a_{2y} + b_1a_{2x} - a_{1xy} - a_{0x} - a_2a_{1y} - b_2a_{1x} = 0,$$

$$b_{0xx} + b_{0yy} + a_1b_{0y} + b_1b_{0x} - a_{0xy} - a_2a_{0y} - b_2a_{0x} = 0.$$

После преобразования системы находим:

$a_2 = 1/2(b_1 + \varphi_y),\ b_2 = 1/2(a_1 - \varphi_x),\ \varphi_{yy} - \varphi_{xx} = 0,$

$a_1 = \varphi_x + \psi_y,\ b_1 = \psi_x,$

$$\psi_{xyy} - 1/2\varphi_{xx}\psi_y + 1/2\varphi_x\psi_{xx} + 1/2\psi_y\psi_{yy} + \varphi_{xxy} - \varphi_{xxx} - 1/2\varphi_y\varphi_{xy} = a_{0y} - b_{0x}; \qquad (1)$$

$$\psi_{xxx} + 1/2\psi_x\psi_{xx} - 1/2\varphi_y\psi_{yy} + 1/2\varphi_{xy}\psi_x + \varphi_{xxy} - 1/2\varphi_y\varphi_{xy} - 1/2\varphi_x\varphi_{xy} + 1/2\varphi_x\varphi_{xx} = -2b_{0y} + a_{0x}; \qquad (2)$$

$$\psi_x(2b_{0x} - a_{0y}) + \psi_y(2b_{0y} - a_{0y}) + (2b_{0x} - a_{0y})_x + (2b_{0y} - a_{0x})_y - \varphi_x a_{0y} = 0.$$

Обозначая левые части равенств (1) и (2) соответственно через f_1 и f_2, получаем:

$$a_{0y} + b_{0x} = f_1;$$

$$-2b_{0y} + a_{0x} = f_2;$$

$$\psi_x f_1 + \psi_y f_2 + f_{1x} + f_{2y} - \varphi_x a_{0y} = 0.$$

Интересно попарно прокоммутировать операторы гиперболического, эллиптического и параболического типов, и рассмотреть соответствующие дифференциальные уравнения, порожденные такими парами операторов, как это сделано в случае примеров 1 и 2.

Литература

1. *Манин Ю.И* .Алгебраические аспекты нелинейных дифференциальных уравнений//Современные проблемы математики, 1978. – Т.11. – .5-152., т.10, вып.4, 1976, с.13-29.
2. *Куижева С.К.* О дифференциальных уравнениях, порожденных коммутирующими линейными операторами//Труды Физического общества Республики Адыгея, 200 – № 5. – С.95-99.

On differential equations in partial with of commutative linear differential operators

S.K.Kuigeva

The differential operators are calculated, their zero commutators giving differential equations.

