О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛАХ КВАДРАТИЧНОЙ СИСТЕМЫ В ОДНОМ СЛУЧАЕ

Д. С. Ушхо

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

Для квадратичной вещественной дифференциальной системы на плоскости с взаимно простыми правыми частями найдены достаточные условия отсутствия предельных циклов в случае наличия у нее четырех особых точек, образующих невыпуклый четырехугольник так, что внутренняя из них является антиседлом.

Ввиду многочисленных приложений квадратичных систем в теории колебаний изучением различных вопросов, касающихся поведения их траекторий, занимались многие математики, в числе которых Тун-Цзинь-Чжу [1], Ли Чендчи [2], Коппель В.А. [3], Черкас Л.А. и Жилевич Л.И. [4-7], Рычков Г.С. [8, 9], Яблонский А.И. [10], Лукашевич Н.А. [11], Берлинский А.Н. [12], Ильин А.А. [13], Баутин Н.Н. и многие другие.

В настоящей заметке найдены достаточные условия отсутствия предельных циклов системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sum_{i+j=0}^{2} a_{ij}x^iy^j = P(x,y), \\ \frac{dy}{dt} &= \sum_{i+j=0}^{2} b_{ij}x^iy^j = Q(x,y) \end{aligned} \tag{1}$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – вещественны и взаимно просты, в одном случае, а именно, когда (1) имеет четыре состояния равновесия, образующие невыпуклый четырехугольник.

Предварительно докажем несколько лемм и теорему, которые позволяют привести систему (1) в рассматриваемом случае к специальному виду.

Лемма 1. Свойство прямой l быть изоклиной системы (1) инвариантно относительно линейного невырожденного преобразования

$$\begin{aligned} x &= \alpha\bar{x} + \beta\bar{y} + \omega, \\ y &= \gamma\bar{x} + \delta\bar{y} + \eta. \end{aligned} \tag{2}$$

Для краткости изложения в дальнейшем будем говорить, что на изоклине l задано направление k, если угловой коэффициент касательной к траектории в точке ее пересечения с l равен k.

Доказательство. Пусть на l задано направление $k \neq 0, \infty$. Применим (2) к системе (1):

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{d\tau} &= \delta P(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} + \omega, \gamma\bar{x} + \delta\bar{y} + \eta) - \beta Q(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} + \omega, \gamma\bar{x} + \delta\bar{y} + \eta), \\ \frac{d\bar{y}}{d\tau} &= -\gamma P(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} + \omega, \gamma\bar{x} + \delta\bar{y} + \eta) + \alpha Q(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} + \omega, \gamma\bar{x} + \delta\bar{y} + \eta) \end{aligned} \tag{3}$$

где $d\tau = dt/\Delta$, $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

По условию

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)\Big|_{(x,y)\in l} = k. \tag{4}$$

Пусть в результате преобразования (2) l переходит в прямую $\bar{l}$. Тогда из (3) с учетом (4) имеем

$$\left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}\right)\Big|_{(\bar{x},\bar{y})\in\bar{l}} = \frac{-\gamma+\alpha k}{\delta-\beta k} = \bar{k} - const. \tag{5}$$

Равенство (5) означает, что прямая $\bar{l}$ – образ прямой l в отображении (2), является изоклиной системы (3). Лемма доказана.

Замечание 1. Очевидно, при параллельном переносе направление на изоклине не меняется. В самом деле, при $\alpha=\delta=1, \gamma=\beta=0$ из (5) следует равенство $k=\bar{k}$.

Замечание 2. Так как изоклине бесконечности (нуля) системы (1) соответствует кривая $P(x,y)=0$ $\;(Q(x;y)=0)$, то утверждение леммы 1 справедливо и для случая $k=\infty$ $\;(k=0)$. Им соответствует $\bar{k}=-\frac{\alpha}{\beta}$ $\;(\bar{k}=-\frac{\gamma}{\delta})$. Отсюда следует, что изоклина бесконечности (нуля) остается неизменной в смысле заданного на ней направление не только при параллельном переносе, но и при осуществлении преобразования (2), где $\beta=0$ $\;(\gamma=0)$.

Замечание 3. Утверждение леммы 1 справедливо, впрочем, и для криволинейной изоклины, и не только для квадратичной системы.

Лемма 2. Существует линейное невырожденное преобразование (2),переводящее изоклину l системы (1) в любую из двух главных изоклин.

Справедливость данного утверждения следует из леммы 1. В самом деле, полагая в (5) $\gamma=\alpha k$ $\;(\delta=\beta k)$, получим $\bar{k}=0$ $\;(\bar{k}=\infty)$. Отсюда $\bar{l}$ – изоклина нуля (бесконечности).

Лемма 3. Ни через одну из четырех особых точек системы (1) не могут проходить две прямые изоклины l_1 и l_2, на которых задано одно и то же направление k.

Доказательство. Согласно [1] через любую пару точек покоя системы (1) проходит прямая изоклина. Допустим, что через одну из указанных точек равновесия проходят две изоклины l_1 и l_2, на которых задано одно и то же направление k. Тогда по предыдущей лемме эти изоклины можно перевести в одну из главных изоклин. Но состояние равновесия, являющееся точкой самопересечения хотя бы одной из главных изоклин, является сложным (кратным). С другой стороны, квадратичная система (1) имеет максимальное число особых точек, следовательно, все они простые. Лемма доказана.

Условимся под противоположными сторонами четырехугольника (выпуклого или невыпуклого) понимать две стороны, не инцидентные одной и той же вершине, а под диагональю – отрезок прямой, соединяющий две несмежные вершины этого четырехугольника.

Следствие. Если четыре особые точки системы (1) образуют четырехугольник (выпуклый или невыпуклый) $ABCD$, то на противоположных сторонах AB и CD, AD и BC и на диагоналях AC и BD заданы направления k_1, $\;k_2$ и k_3, соответственно. При этом k_i $\;(i=\overline{1,3})$ может быть как конечным, так и бесконечным, но $k_m \neq k_n$ при $m \neq n$ $\;(m,n \in \{1,2,3\})$.

Теорема 1. *Если дифференциальная система* (1) *имеет четыре точки покоя в некоторой части фазовой плоскости (КЧП), то ее невырожденным линейным преобразованием* (2) *можно привести к виду*

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dt} &= (a\bar{x}+b\bar{y}+c)(m\bar{x}+n\bar{y}) \equiv \bar{P}(\bar{x},\bar{y}), \\ \frac{d\bar{y}}{dt} &= (a_1\bar{x}+b_1\bar{y}+c_1)(m_1\bar{x}+n_1\bar{y}) \equiv \bar{Q}(\bar{x},\bar{y}). \end{aligned} \tag{6}$$

Справедливость теоремы следует из лемм 2 и 3, согласно которым одну пару изоклин можно перевести в изоклину нуля (бесконечности), а другую – в изоклину бесконечности (нуля).

Следствие. Числа k_1, $\;k_2$, $\;k_3$, фигурирующие в следствии из леммы 3 – это те и только те значения параметра λ, при которых кривая второго порядка $Q-\lambda P=0$ является распадающейся.

Замечание 4. В условиях теоремы 1 предполагается, что $(\omega;\eta)$ – одна из четырех точек покоя системы (1).

Замечание 5. Утверждение теоремы 1 остается в силе и в случае трех точек покоя системы (1) в КЧП.

Замечание 6. Доказательство теоремы 1, приведенное нами, отличается от доказательства аналогичного утверждения в работе [12]. Для нахождения преобразования (2), переводящего (1) в (6), согласно [12] требуется знание двух различных корней кубического λ-уравнения, вычисление которых является, как правило, процедурой трудоемкой.

Из доказательства лемм, предшествующих теореме 1, вытекает правило нахождения преобразования (2). Изложим его.

Пусть к одной из четырех особых точек системы (1) примыкают две прямые изоклины l_1 и l_2, на которых заданы направления k_1 и k_2, соответственно ($k_1 \neq k_2$), то есть $k_i = \left.\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}\right|_{x;y)\in l_i}$, $i = 1, 2$.

Заметим, что при условии когда l_1и l_2 – главные изоклины, вид (6) обеспечен. Поэтому предполагаем, что хотя бы одна из прямых не является главной изоклиной. В этом случае можно всегда указать две изоклины, примыкающие к одной и той же особой точке, на которых заданы различные направления.

Определенности ради переведем $l_1(l_2)$ в $\bar{l_1}(\bar{l_2})$ – изоклину нуля (бесконечности) системы (6). Для этого из формулы (5) получаем $\gamma = \alpha k_1$, $\delta = \beta k_2$, и преобразование (2) принимает вид

$$x = \alpha\bar{x} + \beta\bar{y} + \omega, \quad y = \alpha k_1\bar{x} + \beta k_2\bar{y} + \eta,$$

где α и β – произвольные, отличные от нуля числа. Поэтому, считая $\alpha = \beta = 1$, окончательно получаем

$$x = \bar{x} + \bar{y} + \omega, \quad y = k_1\bar{x} + k_2\bar{y} + \eta. \tag{7}$$

Если в формулах (7) поменять местами k_1 и k_2, то это будет означать, что $\bar{l_1}(\bar{l_2})$ – изоклина бесконечности (нуля) системы (6).

Пусть система (6) имеет в КЧП четыре состояния равновесия M, N, L, Q.

Обозначим внутреннюю область треугольника MNL через H. Всюду в дальнейшем будем рассматривать только случай, когда $O(0;0) \in H$, а точки M, N, L являются общими для следующих пар прямых, соответственно:

$$a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0 \qquad m_1\bar{x} + n_1\bar{y} = 0;$$

$$a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0 \qquad a_1\bar{x} + b_1\bar{y} + c_1 = 0;$$

$$a_1\bar{x} + b_1\bar{y} + c_1 = 0 \qquad m\bar{x} + n\bar{y} = 0.$$

Теорема 2. *Пусть дифференциальная система* (6) *удовлетворяет неравенствам*

$$-\infty < \frac{a}{b} < \frac{m_1}{n_1} < 0 \tag{8}$$

$$0 < \frac{m}{n} < \frac{a_1}{b_1} < +\infty \tag{9}$$

$$bc < 0, \tag{10}$$

$$b_1c_1 < 0 \tag{11}$$

$$\frac{mc_1}{a_1n - b_1m} \leq \frac{m_1c}{an_1 - bm_1} \tag{12}$$

и хотя бы одной из серии условий:

$$c > 0, \quad c_1 < 0, \quad m > 0, \quad n > 0, \quad m_1 > 0, \quad n_1 < 0; \tag{13}$$

$$c < 0; \quad c_1 > 0; \quad m < 0; \quad n < 0; \quad m_1 < 0; \quad n_1 > 0; \tag{14}$$

$$c > 0; \quad c_1 < 0; \quad m > 0; \quad n > 0; \quad m_1 < 0; \quad n_1 > 0; \tag{15}$$

$$c < 0; \quad c_1 < 0; \quad m < 0; \quad n < 0; \quad m_1 > 0; \quad n_1 < 0; \tag{16}$$

Тогда траектории системы (6) *пересекают стороны треугольника* MNL, *выходя из области* H *при* $t \to +\infty$. *Начало координат* $O(0;0)$ *при этом является неустойчивым узлом или фокусом.*

Доказательство. Легко видеть, что

$$\sigma = mc + n_1 c_1, \quad \Delta = cc_1 nn_1 \left(\frac{m}{n} - \frac{m_1}{n_1} \right),$$

и при выполнении каждой из серий условий (13) – (16) $\sigma > 0$, $\Delta > 0$, то есть $O(0;0)$ – неустойчивый узел или фокус [15].

Согласно [12] особые точки M, N, L – седла, так как M, N, L, O образуют невыпуклый четырехугольник. Как известно (см. например [15]), индекс Пуанкаре седла равен -1. По определению индекса знак функции $\frac{\bar{Q}(\bar{x},\bar{y})}{\bar{P}(\bar{x},\bar{y})}$ меняется с минуса на плюс при переходе через изоклину бесконечности в достаточно малой окрестности седла в положительном направлении. Распределение знаков указанной функции в окрестности седла N изображено на рисунке 1.

Доказательство проведем для случая выполнения серии условий (13), в остальных случаях рассуждения аналогичны.

Итак, в силу (13) $\forall(\bar{x};\bar{y}) \in NL$ имеет место неравенство $(a\bar{x} + b\bar{y} + c)(m\bar{x} + n\bar{y}) > 0$ и $\forall(\bar{x};\bar{y}) \in MN$ выполняется неравенство $(a_1\bar{x} + b_1\bar{y} + c_1)(m_1\bar{x} + n_1\bar{y}) > 0$. Это значит, что изоклину нуля NL и бесконечности MN пересекают траектории системы (6) в направлении выхода из области H при $t \to +\infty$. Из рисунка 1 видно, что изоклина ON либо является ω- сепаратрисой седла N, либо ее пересекают траектории системы в направлении возрастания $\bar{x}$ и $\bar{y}$ при $t \to +\infty$. Так как согласно следствию из леммы 3 прямые NR и ML являются изоклинами, на которых задано одно и то же направление (оно положительное), а в силу неравенства (12) прямая ML имеет отрицательный наклон по отношению к оси $O\bar{x}$, то налицо пересечение ML траекториями системы (6) в направлении выхода из области H при $t \to +\infty$.

Тем самым теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть дифференциальная система* (6) *удовлетворяет неравенствам* (8)-(12) *и хотя бы одной из серий условий:*

$$c > 0; \quad c_1 < 0; \quad m < 0; \quad n < 0; \quad m_1 < 0; \quad n_1 > 0; \tag{17}$$

$$c < 0; \quad c_1 > 0; \quad m > 0; \quad n > 0; \quad m_1 > 0; \quad n_1 < 0; \tag{18}$$

$$c > 0; \quad c_1 > 0; \quad m < 0; \quad n < 0; \quad m_1 > 0; \quad n_1 < 0; \tag{19}$$

$$c < 0; \quad c_1 < 0; \quad m > 0; \quad n > 0; \quad m_1 < 0; \quad n_1 > 0; \tag{20}$$

Тогда траектории системы (6), *пересекающие стороны треугольника* MNL *при* $t \to +\infty$, *входят в область* H. *При этом* $O(0;0)$ *– устойчивый узел или фокус.*

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Теорема 4. *Если дифференциальная система* (6) *удовлетворяет условиям теоремы 1 или 2, то она не имеет предельных циклов.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что при выполнении любой из серий условий (13)-(20) выполняется неравенство

$$mm_1cc_1 < 0 \tag{21}$$

Покажем, что в условиях теорем 1 и 2 имеет место неравенство

$$mc_1 \cdot n_1 c > 0. \tag{22}$$

Допустим, что это не так. Тогда $a) mc_1 > 0, n_1 c < 0$; либо $b) mc_1 < 0, n_1 c > 0$. В случае a) из (21) следует неравенство $m_1 c < 0$. Тогда из двух неравенств $m_1 c < 0$ и $n_1 c < 0$ следует, что $m_1 n_1 > 0$. Это противоречит условию (8). В случае b) приходим к такому же противоречию.

Далее применим к системе (6) критерий Дюлака [15], взяв в качестве функции Дюлака

$$D(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{(a\bar{x} + b\bar{y} + c)(a_1\bar{x} + b_1\bar{y} + c_1)}.$$

В результате получим

$$(\bar{P}D)'_{\bar{x}} + (\bar{Q}D)'_{\bar{y}} = \frac{(mb_1 - na_1)\bar{y} + mc_1}{(a_1\bar{x} + b_1\bar{y} + c_1)^2} + \frac{(n_1 a - m_1 b)\bar{x} + n_1 c}{(a\bar{x} + b\bar{y} + c)^2}. \tag{23}$$

В области G, расположенной выше прямой $(mb_1 - na_1)\bar{y} + mc_1 = 0$ и правее прямой $(n_1 a - m_1 b)\bar{x} + n_1 c = 0$, в которой целиком лежит треугольник MNL, в силу неравенства (22) выражение (23) знакопостоянно. Следовательно, предельных циклов, окружающих $O(0;0)$, система (6) не имеет.

Теорема 5. *Пусть дифференциальная система* (6) *удовлетворяет неравенствам*

$$0 < \frac{m_1}{n_1} < \frac{a}{b} < \frac{a_1}{b_1} < +\infty, \tag{24}$$

$$bc > 0, \tag{25}$$

$$b_1 c_1 < 0, \tag{26}$$

$$\frac{mc_1}{a_1 n - b_1 m} \geq \frac{m_1 c}{a n_1 - b m_1} \tag{27}$$

и хотя бы одной из серии условий:

$$c > 0, \quad c_1 > 0, \quad m > 0, \quad n < 0, \quad m_1 > 0, \quad n_1 > 0; \tag{28}$$

$$c > 0, \quad c_1 < 0, \quad m > 0, \quad n < 0, \quad m_1 < 0, \quad n_1 < 0; \tag{29}$$

$$c < 0, \quad c_1 > 0, \quad m < 0, \quad n > 0, \quad m_1 > 0, \quad n_1 > 0; \tag{30}$$

$$c < 0, \quad c_1 < 0, \quad m < 0, \quad n > 0, \quad m_1 < 0, \quad n_1 < 0; \tag{31}$$

Тогда траектории системы (6) *пересекают стороны треугольника MNL, выходя из области H при $t \to +\infty$. Начало координат $O(0;0)$ при этом является неустойчивым узлом или фокусом.*

Теорема 6. *Пусть дифференциальная система* (6) *удовлетворяет неравенствам* (24)-(27) *и хотя бы одной из серии условий:*

$$c < 0, \quad c_1 < 0, \quad m > 0, \quad n < 0, \quad m_1 > 0, \quad n_1 > 0; \tag{32}$$

$$c > 0, \quad c_1 < 0, \quad m < 0, \quad n > 0, \quad m_1 > 0, \quad n_1 > 0; \tag{33}$$

$$c>0;\quad c_1>0;\quad m<0;\quad n>0;\quad m_1<0;\quad n_1<0; \tag{34}$$

$$c<0;\quad c_1>0;\quad m>0;\quad n<0;\quad m_1<0;\quad n_1<0; \tag{35}$$

Тогда траектории системы (6) *пересекают стороны треугольника* MNL *при* $t\to+\infty$, *входя в область* H. *При этом начало координат* $O(0;0)$ *является устойчивым узлом или фокусом.*

Доказательство теорем 5 и 6 аналогично доказательству теоремы 2.

Теорема 7. *Если дифференциальная система* (6) *удовлетворяет условиям теоремы* 5 *или* 6, *то она не имеет предельных циклов.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.

Взаимное расположение особых точек M,N,L,O системы (6) в условиях теорем 5 и 6 изображено на рисунке 2.

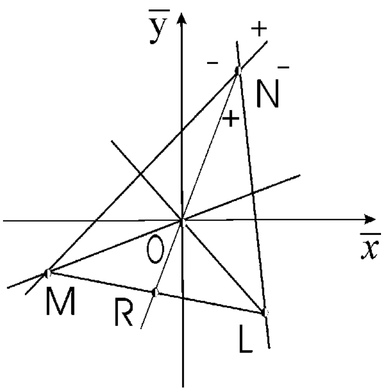

Рис. 1

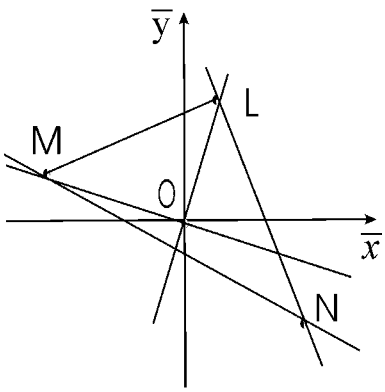

Рис. 2

Теорема 8. *Пусть дифференциальная система* (6) *удовлетворяет условиям* (25)-(27),

$$-\infty<\frac{a_1}{b_1}<\frac{a}{b}<\frac{m_1}{n_1}<0 \tag{36}$$

и хотя бы одной из серий условий (13)-(16). *Тогда траектории системы* (6) *пересекают стороны треугольника* MNL *при* $t\to+\infty$, *выходя из области* H. *При этом начало координат* $O(0;0)$ *является неустойчивым узлом или фокусом.*

Теорема 9. *Пусть дифференциальная система* (6) *удовлетворяет неравенствам* (25)-(27), (36) *и хотя бы одной из серий условий* (17)-(20). *Тогда траектории системы* (6) *пересекают стороны треугольника* MNL *при* $t\to+\infty$, *входя в область* H. *При этом начало координат является устойчивым узлом или фокусом.*

Теоремы 8 и 9 доказываются так же, как и теорема 2.

Теорема 10. *Система дифференциальных уравнений* (6) *не имеет предельных циклов, если она удовлетворяет условиям теоремы* 8 *или* 9.

Доказывается так же, как и теорема 4. Взаимное расположение особых точек M,N,L,O системы (6) в условиях теорем 8 и 9 изображено на рисунке 3.

Теорема 11. *Пусть дифференциальная система* (6) *удовлетворяет неравенствам* (10), (12)

$$b_1c_1>0, \tag{37}$$

$$0<\frac{m_1}{n_1}<\frac{a}{b}<\frac{a_1}{b_1}<+\infty \tag{38}$$

и хотя бы одной из серий условий (28)-(31). *Тогда траектории системы* (6) *пересекают стороны треугольника* MNL *при* $t\to+\infty$, *выходя из области* H. *При этом начало координат* $O(0;0)$ *является неустойчивым узлом или фокусом.*

Теорема 12. *Пусть дифференциальная система* (6) *удовлетворяет неравенствам* (10), (12), (37), (38) *и хотя бы одной из серий условий* (32)-(35). *Тогда траектории системы* (6) *пересекают стороны треугольника MNL при $t \to +\infty$, входя в область H. При этом начало координат $O(0;0)$ является неустойчивым узлом или фокусом.*

Теоремы 11 и 12 доказываются так же, как и теорема 2.

Теорема 13. *Дифференциальная система* (6) *не имеет предельных циклов, если она удовлетворяет условиям теоремы* 11 *или* 12.

Доказывается также, как и теорема 4.

Взаимное расположение особых точек M, N, L, O системы (6) в условиях теорем 11 и 12 изображено на рисунке 4.

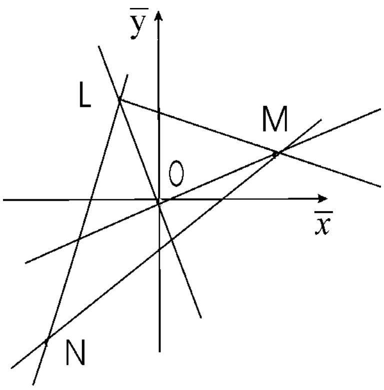

Рис. 3

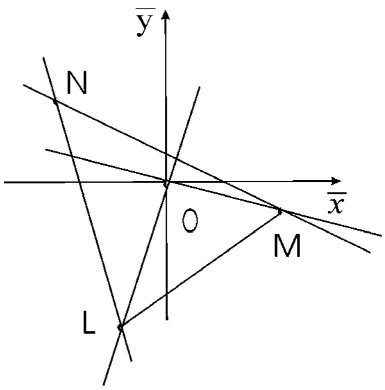

Рис. 4

Замечание 7. В связи с условиями отсутствия предельных циклов, полученными нами в настоящей заметке, отметим, что в работе [13] для дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt} = y(x + \beta y + \alpha), \frac{dy}{dt} = a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + a_{20}x^2 + a_{02}y^2$$

получены достаточные условия вхождения траекторий системы внутрь треугольника, образованного тремя внешними особыми точками, когда внутренняя четвертая точка покоя является устойчивым фокусом. На основании этого автором [13] утверждается, что система имеет четное число предельных циклов.

Литература

1. *Тун-Изинь-Чжу.* Расположение предельных циклов системы

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{0<i+j\le 2} a_{ik}x^iy^k, \frac{dy}{dt} = \sum_{0<i+j\le 2} b_{ik}x^iy^k$$

/ Период. сб. переводов иностранных статей. Математика, 6:2, 1962, С. 150-168.

2. *LJ CHENGZHJ.* Two problems of planar quadratic systems. Sci. Sinica. Ser. A 26 (1983), 471-481.

3. *Коппель В.А.* Обзор квадратичных систем//Дифференциальные уравнения, Т. 2, 1966. С. 293-304.

4. *Черкас Л.А.* Отсутствие предельных циклов одного дифференциального уравнения, имеющего негрубый фокус//Дифференциальные уравнения, Т. 6. 1970, С. 779-783.

5. *Черкас Л.А.* Циклы уравнения $y' = Q_2(x,y)/P_2(x,y)$//Дифференциальные уравнения. Т. 9, 1973. С. 1432-1437.

6. *Черкас Л.А., Жилевич Л.И.* Некоторые признаки отсутствия и единственности предельных циклов//Дифференциальные уравнения. Т.6, 1970. С. 1170-1178.

7. *Жилевич Л.И.* О сепаратрисах и предельных циклах некоторых дифференциальных уравнений//Дифференциальные уравнения. Т. 7, 1971. С. 782-790.

8. *Рычков Г.С.* Предельные циклы уравнения

$$(b_{10}x + y)dy = \sum_{i+j=1}^{2} a_{ij}x^i y^j dx$$

// Дифференциальные уравнения. Т. 6, 1970. С. 2193-2199.

9. *Рычков Г.С.* Предельные циклы уравнения $u(x+1)du = (-x + ax^2 + bxu + cu + du^2)dx$// Дифференциальные уравнения. Т. 6, 1970. С. 1752-1760.

10. *Яблонский А.И.* Алгебраические интегралы одной системы дифференциальных уравнений// Дифференциальные уравнения. Т. 6, 1970. С. 1752-1760.

11. *Лукашевич Н.А.* Качественная картина в целом для системы дифференциальных уравнений имеющей особую точку типа центр//Доклады АН БССР. 1960. Т. 4, N 12. С. 497-500.

12. *Берлинский Н.А.* О поведении интегральных кривых одного дифференциального уравнения//Известия вузов, N 2(15), 1966. С. 3-18.

13. *Ильин А.А.* Взаимное расположение сепаратрис и предельные циклы одной системы дифференциальных уравнений//Волжский матем. сб., вып. 12, 1971. С. 41-43.

14. *Баутин Н.Н.* Об одном дифференциальном уравнении, имеющем предельный цикл// Журнал технической физики. Т. IX, вып. 7, 1939. С. 601-611.

15. *Андронов А.А. и др.* Качественная теория динамических систем второго порядка. – М.: Наука, 1966. – 568 с.

On limit cycles of quadratic system in a given case

D. S. Ushkho

Sufficient conditions of absence of limit cycles for quadratic real differential system on plane with coprime right-hand parts are found.