2002 г. **№7**

Труды ФОРА

ПРЯМЫЕ ИЗОКЛИНЫ И КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ КВАДРАТИЧНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ

Д. С. Ушхо, М. И. Горних

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

Для вещественной квадратичной дифференциальной системы второго порядка с взаимно простыми правыми частями доказано, что через любую конечную точку покоя проходит по крайней мере одна прямая изоклина. Их число в случае невырожденной линейной части не превосходит трех.
Доказана теорема об инвариантности свойства кривой быть изоклиной автономной дифференциальной системы на плоскости относительно невырожденного линейного преобразования декартовых переменных, и как следствие этой теоремы доказано, что всякая изоклина системы посредством такого преобразования может быть переведена в одну из главных изоклин. При этом указывается вид линейного преобразования, переводящего данную прямую изоклину квадратичной системы в изоклину нуля или бесконечности.
В зависимости от числа прямых изоклин, проходящих через особые точки, взаимного их расположения и числа особых точек найдены все возможные канонические формы квадратичной системы. Тем самым подтверждены ранее полученные иным способом результаты, и они существенно дополнены.

В предлагаемой статье доказывается, что через особую точку автономной дифференциальной системы

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sum_{i+j=0}^{2} a_{ij}x^iy^j = P_2(x,y), \\ \frac{dy}{dt} &= \sum_{i+j=0}^{2} b_{ij}x^iy^j = Q_2(x,y) \end{aligned} \tag{1}$$

где $a_{ij}, b_{ij} \in R, (P_2, Q_2) = 1$ проходит по крайней мере одна прямая изоклина, дается оценка числа прямых изоклин, проходящих через особую точку системы (1). В зависимости от числа особых точек и числа прямых изоклин, проходящих через них, найдены все возможные канонические формы системы (1).

Найдено характеристическое уравнение (уравнение возможных направлений) прямых изоклин системы (1), проходящих через особую точку $(0;0)$.

Целью качественного интегрирования системы (1) является установление схемы поведения ее траекторий на плоскости. Но поведение траекторий любой автономной дифференциальной системы на плоскости, а значит и системы (1), определяется такими особыми траекториями как состояние равновесия, сепаратриса, предельный цикл [1].

Из результатов работы [2] следует, что взаимное расположение предельных циклов системы (1) существенно зависит от наличия и взаимного расположения прямых изоклин этой системы. Впрочем, следует заметить, что автором статьи [2] использована работа [3], согласно которой число предельных циклов системы (1) не превосходит трех. Данная оценка оказалась ошибочной, ибо впоследствии были построены квадратичные системы, имеющие по меньшей мере четыре предельных цикла. Примером такой системы является система [4]:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \lambda x - y - 10x^2 + (5+\delta)xy + y^2, \\ \frac{dy}{dt} &= x + x^2 + (-25 + 8\epsilon - 9\delta)xy, \end{aligned}$$

где $\delta = -10^{-13}, \epsilon = -10^{-52}, \lambda = -10^{-200}$.

В пользу актуальности рассматриваемых в настоящей заметке вопросов говорит и тот факт, что задача нахождения координат состояний равновесия системы (1) становится трудно разрешимой в общем случае многочленов $P_2(x,y)$ и $Q_2(x,y)$. Наличие же хотя бы одной прямой изоклины, проходящей через особую точку, делает эту задачу реально разрешимой, в чем мы убедимся ниже.

В дальнейшем под канонической формой записи системы (1) будем понимать такую форму ее записи, при которой правая часть хотя бы одного из двух уравнений этой системы представляет собой произведение двух линейных форм (быть может, совпадающих).

Теорема 1. *Пусть прямой $l : y = kx + b$ принадлежат n особых точек $(x_i; y_i), i = \overline{1,n}$ дифференциальной системы*

$$\frac{dx}{dt} = P_n(x;y), \quad \frac{dy}{dt} = Q_n(x,y); \tag{2}$$

где $P_n(x,y)$ и $Q_n(x,y)$ – взаимно простые вещественные многочлены n-ой степени.

Тогда l – изоклина системы (2).

В самом деле,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)\Big|_{(x,y)\in l} = \frac{Q_n(x,y)}{P_n(x,y)} = \frac{\alpha(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{\beta(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)} = \frac{\alpha}{\beta} = const.$$

Замечание 1. Если $Q_n(x, kx+b) \equiv 0 (P_n(x, kx+b) \equiv 0)$, то прямая l – изоклина нуля (бесконечности). Одновременно указанные тождества не могут быть выполнены, так как по условию $(P_n, Q_n) = 1$.

Таким образом, $\frac{\alpha}{\beta}$ может быть как конечным, так и бесконечным.

Следствие 1. Через две особые точки квадратичной системы проходит прямая изоклина.

Теорема 2. *Через особую точку $M(x_0, y_0)$ системы (1) проходит по крайней мере одна прямая изоклина.*

Доказательство. Не умаляя общности рассуждений, считаем точку M, совпадающей с началом координат $O(0;0)$. Поэтому рассмотрим систему (1) при $a_{00} = b_{00} = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, \\ \frac{dy}{dt} &= b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Покажем, что существует хотя бы одно действительное значение k, при котором прямая $y = kx$ является изоклиной системы (3).

Рассмотрим равенство

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)\Big|_{y=kx} = \frac{b_{10} + b_{01}k + (b_{20} + b_{11}k + b_{02}k^2)x}{a_{10} + a_{01}k + (a_{20} + a_{11}k + a_{02}k^2)x}. \tag{4}$$

Если выполняется одно из условий

$$b_{10} + b_{01}k = b_{20} + b_{11}k + b_{02}k^2 = 0, \tag{5}$$

$$a_{10} + a_{01}k = a_{20} + a_{11}k + a_{02}k^2 = 0, \tag{6}$$

то прямая $y = kx$ является изоклиной нуля или бесконечности. Одновременно (5) и (6) не могут быть выполнены, ибо правые части (3) взаимно просты. Считая не выполненным ни одно из условий (5) и (6), можно утверждать, что правая часть (4) суть постоянное число (не зависит от x), если и только если

$$\begin{aligned} b_{10} + b_{01}k &= \alpha(a_{10} + a_{01}k), \\ b_{20} + b_{11}k + b_{02}k^2 &= \alpha(a_{20} + a_{11}k + a_{02}k^2), \end{aligned} \tag{7}$$

где $\alpha \in R$ и $\alpha \neq 0$.

Из (7) имеем уравнение относительно k:

$$
\begin{aligned}
&(a_{02}b_{01} - a_{01}b_{02})k^3 + (a_{02}b_{10} + a_{11}b_{01} - a_{10}b_{02} - a_{01}b_{11}k^2 + \\
&+(a_{11}b_{10} + a_{20}b_{01} - a_{10}b_{11} - a_{01}b_{20})k + a_{20}b_{10} - a_{10}b_{20} = 0.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Если $a_{02}b_{01} - a_{01}b_{02} = 0$, то, как нетрудно видеть, $x = 0$ – изоклина системы (3).

Если же $a_{02}b_{01} - a_{01}b_{02} \neq 0$, то уравнение (8) имеет по крайней мере один вещественный корень как уравнение нечетной степени с вещественными коэффициентами. Теорема доказана.

Следствие 2. Через особую точку квадратичной системы проходит не более трех прямых изоклин, если в результате параллельного переноса начала координат в эту особую точку система (3) удовлетворяет условию:

$$
|a_{10}| + |a_{01}| + |b_{10}| + |b_{01}| > 0. \tag{9}
$$

Следствие 3. Если неравенство (9) не выполнено, то есть $a_{10} = a_{01} = b_{10} = b_{01} = 0$, то прямая $y = kx$ при любом k является изоклиной системы (3), и через начало координат системы (3) проходит бесконечное множество ее прямых изоклин (исключая начало координат).

Замечание 2. Уравнение (8) назовем характеристическим уравнением прямых изоклин системы (3), проходящих через начало координат $O(0,0)$, так как ему удовлетворяют возможные направления (k) этих прямых.

Замечание 3. Теорема 2 доказана в работах [2, 5] иным способом, а именно с использованием критерия распадения кривой второго порядка (равенства нулю третьего инварианта [6]).

Для краткости изложения будем говорить, что на изоклине L дифференциальная система

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= P(x,y), \\
\frac{dy}{dt} &= Q(x,y)
\end{aligned} \tag{10}
$$

индуцирует направление m, если угловой коэффициент касательной к траекториям системы (10) в точках их пересечения с L равен m.

Теорема 3. *Свойство кривой L быть изоклиной автономной дифференциальной системы* (10) *инвариантно относительно линейного невырожденного преобразования*

$$
x = \alpha\bar{x} + \beta\bar{y}, \quad y = \gamma\bar{x} + \delta\bar{y}. \tag{11}
$$

Доказательство. Пусть система (10) индуцирует на L направление m, то есть

$$
\left.\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}\right|_{(x,y)\in L} = m, \tag{12}
$$

где $m \in R$.

В силу (11) система (10) примет вид:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\bar{x}}{d\tau} &= \delta P(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}, \gamma\bar{x} + \delta\bar{y}) - \beta Q(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}, \gamma\bar{x} + \delta\bar{y}), \\
\frac{d\bar{y}}{d\tau} &= -\gamma P(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}, \gamma\bar{x} + \delta\bar{y}) + \alpha Q(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}, \gamma\bar{x} + \delta\bar{y}).
\end{aligned} \tag{13}
$$

Здесь

$$
d\tau = \frac{dt}{\Delta}, \Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0
$$

.

Пусть в результате преобразования (11) кривая L переходит в кривую $\bar{L}$. Тогда с учетом (13) и (12) имеем:

$$\left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}\right)\Big|_{(x,y)\in\bar{L}} = \frac{-\gamma+\alpha m}{\delta-\beta m} = \bar{m} = const. \tag{14}$$

Из (14) следует, что $\bar{L}$ – образ кривой L в преобразовании (11), является изоклиной системы (13). Теорема доказана.

Теорема 4. *Произвольную изоклину L системы (10) можно перевести в любую из двух главных изоклин.*

Справедливость данного утверждения следует из предыдущей теоремы при $\alpha m = \gamma$ ($\bar{L}$ – изоклина нуля) и при $\beta m = \delta$ ($\bar{L}$ – изоклина бесконечности).

Теорема 5. *Если через особую точку системы (1) проходят три несовпадающие прямые изоклины, то по крайней мере на двух из них эта система индуцирует различные направления.*

В самом деле, если допустить противное, то согласно теореме 4 все три прямые можно перевести либо в изоклину нуля, либо в изоклину бесконечности. А так как линейное невырожденное преобразование переводит пересекающиеся прямые в пересекающиеся прямые, то результатом применения (11) к системе (3) будет система (13), где одна из ее правых частей представляет собой произведение трех линейных множителей. Но это невозможно, так как аффинное преобразование не меняет порядка алгебраической кривой.

Теорема 6. *Если на двух пересекающихся в особой точке системы (1) изоклинах индуцировано одно и то же направление, то эта особая точка является сложной.*

Доказательство. Согласно теореме 4 существует невырожденное преобразование (11), переводящее систему (3) в систему

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dt} &= (a_1\bar{x}+b_1\bar{y})(a_2\bar{x}+b_2\bar{y}) \equiv \bar{P}(\bar{x},\bar{y}), \\ \frac{d\bar{y}}{dt} &= \bar{Q}(\bar{x},\bar{y}). \end{aligned} \tag{15}$$

Очевидно, указанные в условии теоремы пересекающиеся изоклины переведены в изоклину бесконечности $\bar{P}(\bar{x},\bar{y})=0$.

Из (15) видно, что

$$\begin{vmatrix} \bar{P}'_{\bar{x}}(0,0) & \bar{P}'_{\bar{y}}(0,0) \\ \bar{Q}'_{\bar{x}}(0,0) & \bar{Q}'_{\bar{y}}(0,0) \end{vmatrix} = 0,$$

то есть $O(0,0)$ – сложная особая точка системы (15).

Теорема 7. *Если система* (1) *имеет четыре состояния равновесия* A, B, C, D, *то существует невырожденное преобразование* (11), *переводящее систему* (1) *в каноническую систему*:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (a_1x+b_1y)(a_2x+b_2y+c_2), \\ \frac{dy}{dt} &= (a_3x+b_3y)(a_4x+b_4y+c_4). \end{aligned} \tag{16}$$

Система (16) получена в предположении, что предварительно начало координат системы (1) перенесено в одну из особых точек и сохранены обозначения переменных x и y.

Коэффициенты (16) удовлетворяют условиям

$$c_2 \neq 0, c_4 \neq 0, \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix} \neq 0, i \neq j; i,j \in 1,2,3,4.$$

Определенности ради считаем здесь и в дальнейшем точку A находящейся в начале координат системы (3).

Точки A, B, C, D могут быть вершинами выпуклого (невыпуклого) четырехугольника (см. рис. 1 и 2).

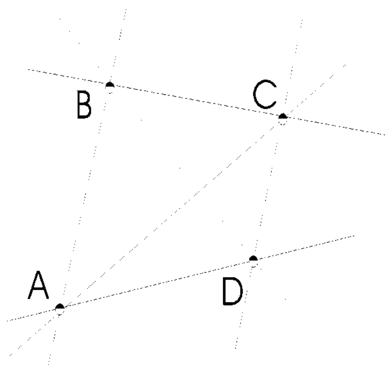

Рис. 1

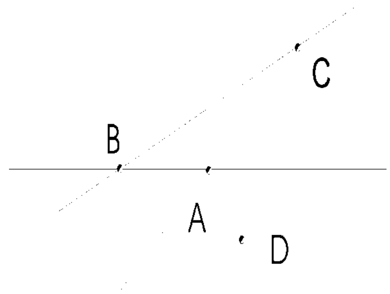

Рис. 2

Согласно следствию 1 через каждое из состояний равновесия A, B, C, D проходят три прямые изоклины. По теореме 5 через точку A проходят две прямые изоклины, на каждой из которых система (3) индуцирует свое направление. Пусть, например, на прямой $AB(AD)$ система (3) индуцирует направление $m_1(m_2)$. Полагая $\gamma = \alpha m_1, \delta = \beta m_2$ линейным преобразованием

$$x = \alpha\bar{x} + \beta\bar{y}, \quad y = \alpha m_1\bar{x} + \beta m_2\bar{y}, \tag{17}$$

где α и β – произвольные не равные нулю вещественные числа, система (3) приводится к виду (16).

Полагая $\alpha = \beta = 1$ в (17), получаем преобразование

$$x = \bar{x} + \bar{y}, \quad y = m_1\bar{x} + m_2\bar{y}, \tag{17$'$}$$

переводящее изоклину $AB(AD)$ соответственно в изоклину нуля (бесконечности) системы (16). Теорема доказана.

Замечание 4. Без труда можно доказать, что на противоположных сторонах четырехугольника $ABCD$ система (3) индуцирует одно и то же направление, и на каждой из трех прямых изоклин, проходящих через любую из указанных четырех точек, система (3) индуцирует свое направление. На любой паре прямых изоклин, не инцидентных одной и той же вершине невыпуклого четырехугольника $ABCD$ система (3) индуцирует одно и то же направление.

Замечание 5. В работе [7] доказывается теорема 7, доказанная нами выше, с применением условия распадения кривой второго порядка, а именно, факта наличия двух различных корней уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} & a_{12} - \lambda b_{12} & a_{13} - \lambda b_{13} \\ a_{12} - \lambda b_{12} & a_{22} - \lambda b_{22} & a_{23} - \lambda b_{23} \\ a_{13} - \lambda b_{13} & a_{23} - \lambda b_{23} & a_{33} - \lambda b_{33} \end{vmatrix} = 0. \tag{18}$$

В обозначениях автора [7] правые части квадратичной системы записаны в виде

$$P(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33},$$
$$Q(x,y) = b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}x + 2b_{23}y + b_{33}.$$

Таким образом преобразование вида (11), приводящее систему (3) к канонической форме, можно найти, лишь решив кубическое уравнение (18).

Из выше приведенных нами рассуждений следует, что для нахождения m_1 и m_2, фигурирующих в преобразовании (17$'$), не нужно решать громоздкого уравнения (18), а достаточно найти значение $\frac{dy}{dx}$ в силу системы (3) в точках прямых AB и AD.

Теорема 8. *Если квадратичная система имеет три конечные особые точки, то она может быть приведена к каноническому виду* (16) *невырожденным преобразованием* (17$'$).

Доказательство основано на том, что через каждую из особых точек A, B, C системы (3) проходит по крайней мере две прямые изоклины, на каждой из которых система (3) индуцирует свое направление.

Возможное расположение прямых изоклин системы (3) в случае трех состояний равновесия изображено на рисунках 3 и 4.

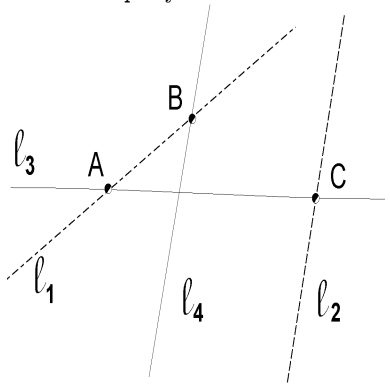

Рис. 3

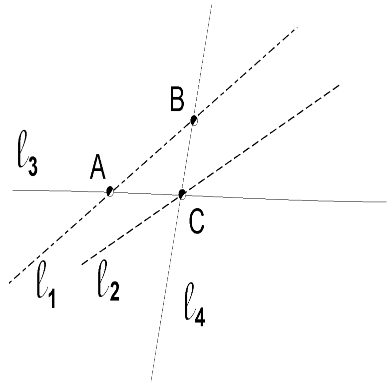

Рис. 4

Случаю $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} = 0, c_2 \neq 0, c_4 \neq 0$ соответствует рисунок 3. Поэтому A, B, C – простые состояния равновесия.

Случаю $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} \neq 0, c_2 \neq 0, c_4 \neq 0$ соответствует рисунок 4.

Поэтому A, B – простые состояния равновесия, C – сложное состояние равновесия.

Пояснение. На рисунках 3 и 4 прямые $l_i, i = \overline{1,4}$ задаются уравнением $a_i x + b_i y + c_i = 0, i = \overline{1,4}$, причем $c_1 = c_3 = 0$.

Лемма. *Если квадратичная система имеет две и только две особые точки A и B в конечной части фазовой плоскости, то хотя бы через одну из них проходят две прямые изоклины.*

Доказательство. Пусть A находится в начале координат системы (3). Согласно следствию 1 через A и B проходит прямая изоклина $y = kx$, которую подходящим линейным невырожденным преобразованием можно перевести в изоклину бесконечности согласно теореме 4. Поэтому, полагая, что через A проходит единственная прямая изоклина (в противном случае лемма доказана), мы получим систему (за переменными x и y сохраняем старые обозначения)

$$\frac{dx}{dt} = (y - k_1 x)^2, \ \frac{dy}{dt} = B_1 x + B_2 y + B_3 x^2 + B_4 xy + B_5 y^2. \qquad (A_1)$$

Применим к системе (A_1) преобразование

$$\bar{y} = -k_1 x + y, \bar{x} = x.$$

В результате система (A_1) примет вид:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{y}^2, \frac{d\bar{y}}{dt} = C_1\bar{x} + C_2\bar{y} + C_3\bar{x}^2 + C_4\bar{x}\bar{y} + C_5\bar{y}^2. \qquad (A_2)$$

Так как на прямой $\bar{y} = 0$ еще одна особая точка системы (A_2), отличная от начала координат, то ее абсцисса равна $\bar{x} = -\frac{C_1}{C_3}$.

Совершив параллельный перенос в системе (A_2) по формулам $\bar{x} = x_1 - \frac{C_1}{C_3}, \bar{y} = y_1$, получаем

$$\frac{dx_1}{dt} = y_1^2, \frac{dy_1}{dt} = -C_1 x_1 + \left(C_2 - \frac{C_1 C_4}{C_3}\right) y_1 + C_3 x_1^2 + C_4 x_1 y_1 + C_5 y_1^2. \qquad (A_3)$$

Составим характеристическое уравнение (8) возможных наклонов прямых изоклин в начале координат системы (A_3):

$$\left(C_2 - \frac{C_1C_4}{C_3}\right)\lambda^3 + C_1\lambda^2 = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2\left(\left(C_2 - \frac{C_1C_4}{C_3}\right)\lambda + C_1\right) = 0.$$

Если $C_2 - \frac{C_1C_4}{C_3} \neq 0$, то, как видно из последнего уравнения, через начало координат проходит кроме прямой $y_1 = 0$ еще прямая изоклина с угловым коэффициентом $\lambda_0 = -\frac{C_1C_3}{C_2C_3 - C_1C_4}$.

Если же $C_2 - \frac{C_1C_4}{C_3} = 0$, то, очевидно, прямая $x_1 = 0$ является изоклиной системы (A_3). Лемма доказана.

В силу доказанной леммы во всех случаях, касающихся наличия двух и только двух конечных особых точек A и B квадратичной системы, без ограничения общности рассуждений будем считать, что через A проходит не менее двух прямых изоклин.

Теорема 9. *Если квадратичная система* (3) *имеет ровно два конечных состояния равновесия A и B, и через одну из них, например, A, проходят три различные прямые изоклины, на каждой из которых эта система индуцирует свое направление, то и через другое состояние равновесия проходят три различных прямых изоклины с тем же свойством.*

Доказательство. Пусть через A проходят еще две прямые изоклины l_1 и l_3, кроме AB (см. рис. 5). Посредством преобразования (17′) система (3) может быть приведена к виду (16), где образ $l_1(l_3)$ является изоклиной бесконечности (нуля) системы (16). Поскольку B – особая точка системы (3), то в силу (16) через B, кроме l_0, которая не переведена ни в одну из главных изоклин, проходят две прямые изоклины – прообразы главных изоклин системы (16). Заметим попутно, что $l_1 \|_4$ и $l_2 \| l_3$, в противном случае мы неизбежно имеем хотя бы три особые точки системы (16), а значит и (3).

Очевидно, в рассматриваемом случае выполняются условия

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Рисунку 5 соответствуют две простые особые точки системы (16).

Теорема 10. *Если квадратичная система* (3) *имеет только две конечные особые точки A и B, причем через A проходят три прямые изоклины, на двух из которых эта система индуцирует одно и то же направление, то через B проходят только две прямые изоклины, на которых система* (3) *индуцирует различные направления.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что особая точка B лежит на одной из двух прямых изоклин, проходящих через точку A и на которых индуцировано одно и то же направление поля системы (3). Предположим, что вопреки утверждению теоремы через точку B проходят три прямые изоклины, тогда на двух из них, отличных от AB индуцировано одно и то же направление. Но это неизбежно ведет к наличию еще по крайней мере одной особой точки системы (3), так как через точку вне прямой к ней можно провести лишь одну параллельную прямую (см. рис. 6). Теорема доказана.

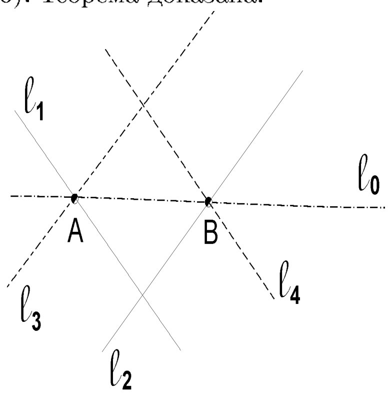

Рис. 5

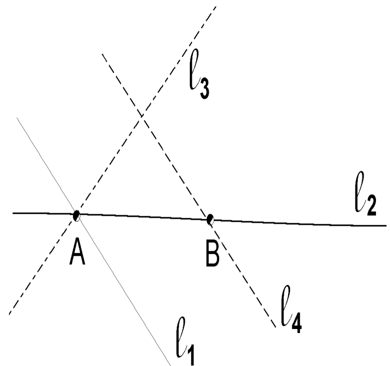

Рис. 6

Итак, преобразованием $(17')$ систему (3) можно привести к канонической форме

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (a_1x+b_1y)(a_2x+b_2y), \\ \frac{dy}{dt} &= (a_3x+b_3y)(a_4x+b_4y+c_4). \end{aligned} \tag{19}$$

Замечание. Преобразование $(17')$ переводит прямую $l_i, i=\overline{1,4}$ в прямую изоклину $a_ix+b_iy+c_i=0$ системы (19), где $c_1=c_2=c_3=0, c_4\neq 0$. Коэффициенты (19) удовлетворяют условиям

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} = 0,$$

Очевидно в рассматриваемом случае A – двукратная особая точка, B – простая особая точка.

Теорема 11. *Если система* (3) *имеет две и только две конечные особые точки A и B, причем через A проходят две прямые изоклины, на которых системой* (3) *индуцированы различные направления, то и через B проходят две различные изоклины с тем же свойством* (рис. 7) *Посредством преобразования* $(17')$ *систему* (3) *можно привести к канонической форме*

$$\frac{dx}{dt} = (a_1x+b_1y)^2, \quad \frac{dy}{dt} = (a_2x+b_2y)(a_3x+b_3y+c_3), \tag{20}$$

где $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_i & b_i \end{vmatrix} \neq 0, i=2,3; c_3\neq 0$. Для системы (20) A и B – двукратные особые точки.

Теорема 12. *Пусть система* (3) *имеет две и только две конечные особые точки A и B, причем через A проходят ровно две различные прямые изоклины, на которых система* (3) *индуцирует одно и то же направление, а через B проходит только одна прямая изоклина AB. Тогда систему* (3) *посредством невырожденного преобразования*

$$x = \bar{x}+\bar{y}, \quad y = \gamma\bar{x}+m\bar{y}, \tag{21}$$

где $\gamma\in R, \gamma\neq m$, m – направление, индуцированное системой (3) на прямой AB, можно привести к виду

$$\frac{dx}{dt} = (a_1x+b_1y)(a_2x+b_2y), \quad \frac{dy}{dt} = Q_2(x,y). \tag{22}$$

Здесь $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Системе (22) соответствует рис. 8. В рассматриваемом случае A – трехкратная особая точка, а B – простая особая точка.

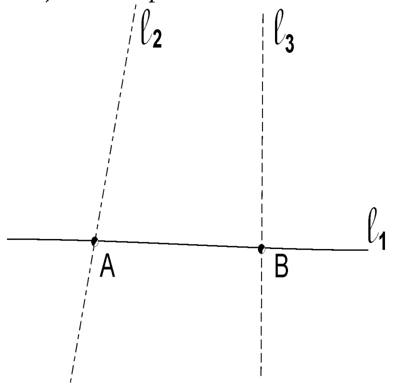

Рис. 7

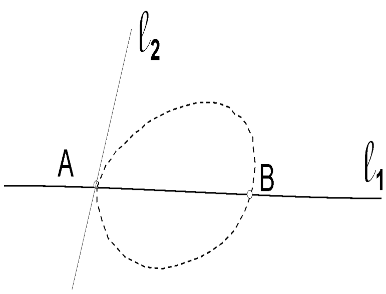

Рис. 8

Теорема 13. *система* (3) *имеет единственную особую точку A, через которую проходит только одна прямая изоклина, то посредством преобразования* (21) *система* (3) *может быть приведена к виду* (23) *или* (24).

$$\frac{dx}{dt} = (a_1x+b_1y)(a_2x+b_2y+c_2), \quad \frac{dy}{dt} = Q_2(x,y), \tag{23}$$

$c_2 \neq 0$.

Если $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 (\neq 0)$, то A – двукратная (простая) особая точка системы (23) (см. рис 9 (10)).

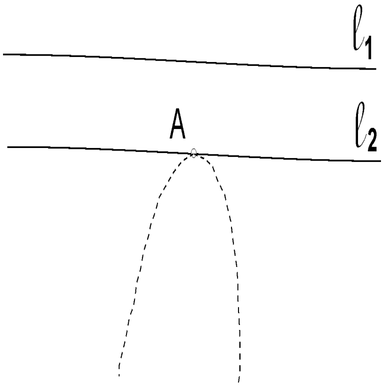

Рис. 9

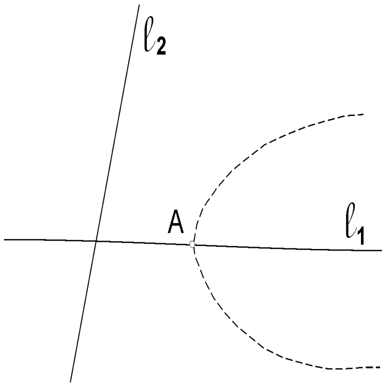

Рис. 10

$$\frac{dx}{dt} = (a_1x + b_1y)^2, \frac{dy}{dt} = Q_2(x, y). \tag{24}$$

Системе (24) соответствует рис. 11. A – четырехкратная особая точка системы (24).

Теорема 14. *Если через единственную точку покоя A системы* (3) *проходят ровно две прямые изоклины и на них индуцировано одно и то же направление системой* (3), *то эту систему посредством преобразования* (21) *можно привести к виду* (22), *где* $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$. (См. рис. 12). A – трехкратная точка покоя системы (22).

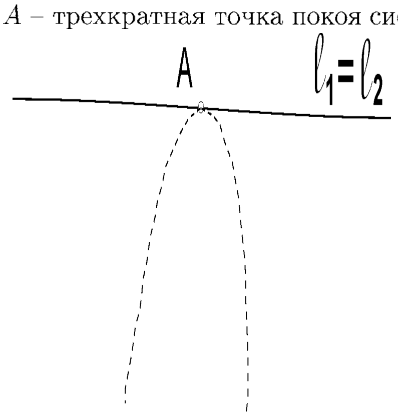

Рис. 11

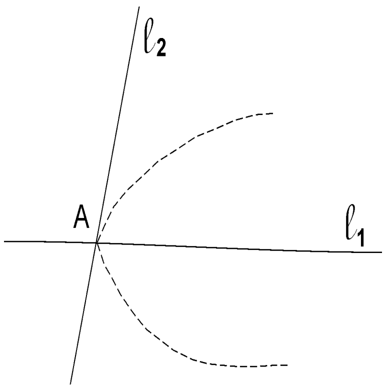

Рис. 12

Теорема 15. *Если через единственную точку покоя A системы* (3) *проходит не менее трех прямых изоклин, то через эту точку проходит бесконечное множество прямых изоклин и систему* (3) *путем преобразования* ($17'$) *можно привести к виду*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (a_1x + b_1y)(a_2x + b_2y), \\ \frac{dy}{dt} &= (a_3x + b_3y)(a_4x + b_4y), \end{aligned} \tag{25}$$

где $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0$.

Частными случаями системы (25) являются следующие:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}, \frac{a_3}{a_4} \neq \frac{b_3}{b_4}; \tag{26}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}, \frac{a_3}{a_4} = \frac{b_3}{b_4}; \tag{27}$$

Условию (27) соответствует случай, когда система (3) индуцирует на каждой из бесконечного множества прямых изоклин, проходящих через A, направление, отличное от направлений на остальных прямых изоклинах.

В рассматриваемом случае A – четырехкратная особая точка.

Теорема 16. *Если через единственную особую точку A системы* (3) *проходят только две прямые изоклины, и на них система* (3) *индуцирует различные направления, то эту систему посредством преобразования* (17′) *можно привести к виду*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (a_1x + b_1y)^2, \\ \frac{dy}{dt} &= (a_2x + b_2y)(a_3x + b_3y + c_3), \end{aligned} \tag{28}$$

где

$$c_3 \neq 0, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

Системе (28) соответствует взаимное расположение прямых изоклин, изображенное на рисунке 13. Здесь $l_1 \parallel l_3$. A – двукратная особая точка системы (28).

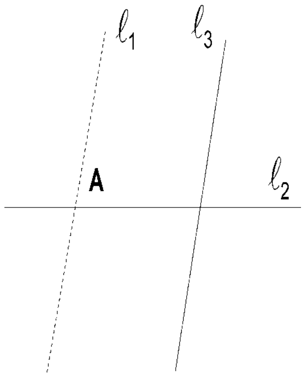

Рис. 13

Резюмируя все выше изложенное, следует сказать, что квадратичная дифференциальная система может быть приведена к каноническому виду, если она имеет хотя бы одну особую точку в конечной части фазовой плоскости. К такому же выводу пришла автор работы [5], но другим способом (см. замечание 3). В упомянутой работе [5] единственная конечная точка покоя квадратичной системы рассматривается лишь как результат слияния четырех состояний равновесия. Нами приведены возможные случаи взаимного расположения прямых изоклин не только в случаях четырех, трех, двух конечных состояний равновесия, но и в случае одной точки покоя. При этом учитывалось число этих изоклин, а также характер индуцированного на них направления, что в конечном итоге позволило выяснить: а) вид канонической системы; б) какие из особых точек являются простыми, а какие сложными (с указанием их кратности).

И, наконец, теоремы Берлинского А.Н. [7] о распределении четырех конечных особых точек квадратичной системы являются прямым и простым следствием полученных нами результатов о том, что через каждую из четырех особых точек проходит три различные прямые изоклины, на которых индуцированы различные направления (ни одна из особых точек не является точкой самопересечения главных изоклин), и известной теоремы Пуанкаре об индексах [1].

Литература

1. *Андронов А.А. и др.* Качественная теория динамических систем второго порядка. – М.: Наука, 1966.
2. *Тун-Цзинь Чжу.* Расположение предельных циклов системы

$$\frac{dx}{dt} = X_2(x, y), \frac{dy}{dt} = Y_2(x, y).$$

   Периодический сборник иностранных статей. Математика, 6:2, 1962, С. 150-168.
3. *Петровский И.Г., Ландис Е.М.* О числе предельных циклов уравнения $\frac{dy}{dt} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, где P и Q – многочлены 2-й степени. Матем. сб. 30(72), 1952, N 1, С. 209-250.
4. *Sonling Shi.* A concrete example of the existence of four limit cycles for plane quadratic systems. – Scientia Sinica, 1980, v. 23, N 2, pp. 153-158.
5. *Шахова Л.В.* О прямых изоклинах. Труды Самаркандского гос. ун-та имени Алишера Навои. Нов. сер., вып. N 144, 1964. – С. 93-105.
6. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1981.
7. *Берлинский А.Н.* О поведении интегральных кривых одного дифференциального уравнения// Известия высш. учеб. заведений, N 2(15), 1960. – С. 3-18.

Direct isoclinal lines and canonical forms of quadratic differential system on 2-D point

D. S. Ushkho, M.I. Gornih

For the real quadratic second order differential system with coprime right-hand parts theorem is proven that at least one direct isoclinal line passes per any final rest point. The number of isoclinal lines cannot be more than three for nondegenerate line part. The theorem proves the properties of isoclinal lines for autonomous differential systems.

