2002 г. **№ 7**

Труды ФОРА

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ АЛГЕБР, ЗАМКНУТЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО КРИВИЗНЫ

Л.Ж. Паланджянц

Майкопский государственный технологический институт, Майкоп

Рассматриваются некоторые свойства алгебр, замкнутых относительно кривизны криволинейного мультипликативного интеграла.

Рассмотрим криволинейный мультипликативный интеграл

$$\overset{\frown}{\int_c} \mathrm{E} + \mathrm{P}(x,y)dx + Q(x,y)dy\,, \tag{1}$$

где $\mathrm{P}(x,y) = \left(p^i_j\right)$, $Q(x,y) = \left(q^i_j\right)$ - гладкие матричные функции n-го порядка; $i, j = 1,2,..,n$; $c : x = x(t),\ y = y(t)$ - гладкая кривая, $t \in (t_0, t_1)$ [1].

Определим операцию кривизны

$$\mathrm{K}(\mathrm{P},Q) = Q_x - \mathrm{P}_y + [Q,\mathrm{P}],\ \mathrm{K}(\mathrm{P},Q) = \left(k^i_j\right).$$

Связь между интегралом (1) и кривизной K выражает известным соотношением:

$$\overset{\frown}{\int_c} \mathrm{E} + \mathrm{P}dx + Qdy = \mathrm{E} + \mathrm{K}\Delta\sigma + o(\Delta\sigma),$$

где $\Delta\sigma$ - площадь, ограниченная замкнутым контуром c; $o(\Delta\sigma)$ - члены более высокого порядка малости, чем $\Delta\sigma$.

В алгебре всех матричных функций n-го порядка $Mat(n)$ найдем подалгебру M, замкнутую относительно операции кривизны, т.е., если $\mathrm{P}, Q \in \mathrm{M}$, то и $\mathrm{K}(\mathrm{P},Q) \in \mathrm{M}$.

Определим подалгебру M как множество всех матричных функций n-го порядка, обладающих общим постоянным собственным подпространством, т.е.,

$$\mathrm{M} = \left\{\left(m^i_j\right) \subset Mat(n) \middle| c_i m^i_j = \lambda(m) c_j\right\},$$

где $c = (c_1, c_2, ..., c_n)$ - постоянный вектор, $\lambda(m)$ - соответствующее собственное значение матрицы $m = \left(m^i_j\right)$.

Можно показать, что множество M замкнуто относительно операции кривизны [2].

Свойства алгебр, замкнутых относительно кривизны.

Пусть M_0 - множество матричных функций n-го порядка, обладающих постоянным собственным подпространством, т.е.

$$\mathrm{M}_0 = \left\{\left(m^i_j\right) \in Mat(n) \middle| m^i_j c^{(m)}_i = \lambda(m) c_j(m)\right\}.$$

1. Преобразование подобия.

Теорема 1. *Пусть* $m \in \mathrm{M}_0$*, где* C *- постоянная матрица. Тогда* $\widetilde{m} \in \mathrm{M}_0$.

Доказательство. Имеем $\widetilde{m}C = Cm$. Так как $m \in \mathrm{M}_0$, то существует постоянный вектор c, такой, что

$$mc = \lambda(m)c,$$

где $\lambda(m)$ - собственное значение матрицы m.

Следовательно,

$$\widetilde{m}Cc = Cmc,$$

т.е. $\widetilde{m}Cc = \lambda(m)Cc$.

Это значит, что вектор Cc является постоянным собственным вектором матрицы $\widetilde{m}$, т.е. $\widetilde{m} \in \mathrm{M}_0$.

Таким образом, собственное значение сохранилось, а собственный вектор умножился на C.

2. Калибровочное преобразование.

Пусть матричные функции $\mathrm{P}, Q \in \mathrm{M}_0$, $C = \left(c^i_j\right)$ - неособая матричная функция.

$$C\mathrm{P}C^{-1} + C_x C^{-1} = \widetilde{\mathrm{P}} \in \mathrm{M}_0, \tag{10}$$

$$CQC^{-1} + C_y C^{-1} = \widetilde{Q} \in \mathrm{M}_0.$$

Тогда выполнены условия:

$$c_i C^i_j c^i = \exp\left(\int \left(\lambda\left(\widetilde{\mathrm{P}}\right) - \lambda(\mathrm{P})\right)dx + \left(\lambda\left(\widetilde{Q}\right) - \lambda(Q)\right)dy\right), \tag{11}$$

где c_i, c^j - постоянные, $\lambda\left(\widetilde{\mathrm{P}}\right), \lambda(\mathrm{P}), \lambda\left(\widetilde{Q}\right), \lambda(Q)$ - соответствующие собственные значения матриц $\widetilde{\mathrm{P}}, \mathrm{P}, \widetilde{Q}, Q$.

Доказательство.

Из условий (10) следует, что

$$C^i_{jx} = \widetilde{\mathrm{P}}^i_s C^s_j - C^i_s \mathrm{P}^s_j.$$

Учитывая, что

$$\widetilde{\mathrm{P}}^i_j c_i = \lambda(\mathrm{P})c_j,\ \mathrm{P}^i_j c^j = \lambda(\mathrm{P})c^i,\ \widetilde{\mathrm{P}}^i_j c_i = \lambda\left(\widetilde{\mathrm{P}}\right)c_j,\ \widetilde{\mathrm{P}}^i_j c^j = \lambda\left(\widetilde{\mathrm{P}}\right)c^i,$$

получаем

$$\left(c_i C^i_j c^i\right)_x = \left(\lambda\left(\widetilde{\mathrm{P}}\right) - \lambda(\mathrm{P})\right)c_s C^s_j c^j. \tag{12}$$

Аналогично, получаем:

$$\left(c_i C^i_j c^j\right)_y = \left(\lambda\left(\widetilde{Q}\right) - \lambda(Q)\right)c_s C^s_j c^j. \tag{13}$$

из уравнений (12) и (13) получается равенство (11).

Теорема 2. *Пусть* $\mathrm{P} = \left(\mathrm{P}^i_j\right)$, $C = \left(c^i_j\right)$ *принадлежат алгебре* M.

Тогда $\tilde{P} = \left(\tilde{P}^i_j\right)$ *также принадлежит алгебре* M, *где* $P = CPc^{-1} + C_x C^{-1}$.

Доказательство.

Имеем

$$\tilde{P}^i_s C^s_j - C^i_k P^k_j = C^i_{jx}.$$

Умножим обе части этого равенства на a^j, получаем:

$$\tilde{P}^i_s C^s_j a^j = C^i_s P^s_j a^j + \left(C^i_j a^j\right)_x.$$

Так как $P \in M$ и $C \in M$, то выполняются равенства:

$$P^s_j a^j = \lambda(P) a^s,\ C^s_j a^j = \lambda(C) a^s.$$

Тогда имеем:

$$\tilde{P}^i_s a^s = \left(\lambda(P) + \frac{\lambda'_x(c)}{\lambda(c)}\right) a^i,$$

т.е. $\tilde{P} \in M$.

Таким образом, алгебра M инвариантна при калибровочных преобразованиях. При этом, имеют место равенства:

$$\lambda(\tilde{P}) = \lambda(P) + \frac{\lambda'_x(c)}{\lambda(c)}$$

$$\lambda(\tilde{Q}) = \lambda(Q) + \frac{\lambda'_y(c)}{\lambda(c)}.$$

Литература

1. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
2. *Паланджянц Л.Ж.* Геометрия мультипликативного интеграла. – Майкоп: Качество, 1997.

On some properties of algebras closed in relation curvature

L.Zh. Palandzhyants

Some properties of algebras relative to curvature of line multiplicative integral considered in the paper.

