2002 г. №7

Труды ФОРА

ПРАВИЛА ЛОПИТАЛЯ

К. С. Мамий

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

В статье, опираясь на личный опыт автора чтения лекций по математическому анализу студентам-математикам университета дается подробное обоснование всех случаев применимости правил Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

Доказательство правил Лопиталя существенно опирается на формулу Коши. Поэтому, для удобства читателя, напомним ее.

Теорема (формула) Коши. Если функции f и g непрерывны в точках a и b, дифференцируемы на интервале $(a;b)$ и $g'(x)\neq 0$ на $(a;b)$, то существует число $c\in(a;b)$, что справедлива формула Коши:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Заметим, что формула Коши верна не только для случая $a<b$, но и при $a>b$.

Теорема 1. (Правило Лопиталя раскрытия неопределенности $\frac{0}{0}$). Пусть выполнены следующие условия:

1^0. $x_0\in\mathbb{R}$ и $a\in\{x_0-0;x_0+0;x_0;-\infty;+\infty;\infty\}$.

2^0. Функции f и g дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности $\overset{o}{U}_a$ точки a, причем $g'(x)\neq 0\ \ \forall\ \ x\in\overset{o}{U}_a$.

3^0. $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$.

4^0. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$, где $A\in\tilde{\mathbb{R}}, \tilde{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty;+\infty;\infty\}$.

Тогда справедливо утверждение:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A, \tag{1}$$

то есть предел при $x\to a$ отношения двух бесконечно малых функций в точке a равен пределу отношения их производных при $x\to a$.

▲ Для доказательства этой теоремы рассмотрим четыре случая: $a=x_0-0, a=x_0+0, a=x_0$ и $a\in\{-\infty;+\infty;\infty\}$.

Случай 1. Пусть $a=x_0-0$ и $\overset{o}{U}_a=\overset{o}{U}(x_0-0)=U^-(x_0)=(\alpha;x_0)$, где $\alpha<x_0$. Тогда по условию 3^0 $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0}g(x)=0$ и

$$\lim_{x\to x_0-0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A. \tag{2}$$

Доопределим функции f и g в точке x_0, положив

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}f(x), & \text{если}\ \ x\in U^-(x_0),\\ 0, & \text{если}\ \ x=x_0,\end{cases}$$

и

$$\tilde{g}(x)=\begin{cases}g(x), & \text{если}\ \ x\in U^-(x_0),\\ 0, & \text{если}\ \ x=x_0.\end{cases}$$

Тогда функции $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ будут непрерывны на $(\alpha;x_0]$ и дифференцируемы на $(\alpha;x_0)$, причем $\tilde{f}'(x)=f'(x)$, $\tilde{g}(x)=g'(x)\ \ \forall x\in(\alpha;x_0)$. Пусть x - произвольное число из $(\alpha;x_0)$. Тогда $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$

будут непрерывны на отрезке $[x; x_0]$ дифференцируемы на интервале $(x; x_0)$ и $\tilde{g}'(t) = g'(t) \neq 0 \ \ \forall \ \ t \in (x; x_0)$, то есть функции $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ будут удовлетворять всем условиям теоремы Коши. Следовательно, $\exists c \in (x; x_0)$, что справедливо равенство:

$$\frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_0)}{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(x_0)} = \frac{\tilde{f}'(c)}{\tilde{g}'(c)} \overset{(\alpha<x<c<x_0)}{\Longleftrightarrow} \frac{f(x)-0}{g(x)-0} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

то есть

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\tilde{f}'(c)}{\tilde{g}'(c)}. \tag{3}$$

Если теперь в равенстве (3) x устремить к $x_0 - 0$, то и $c \to x_0 - 0$, так как $x < c < x_0$. При этом, с учетом равенства (2), получим, что

$$\lim_{x\to x_0-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0-0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to x_0-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

Таким образом, в случае $a = x_0 - 0$ теорема доказана.

Случай 2. Пусть $a = x_0 + 0$ и $\overset{o}{U}_a = \overset{o}{U}(x_0 + 0) = U^+(x_0) = (x_0; \beta)$, где $x_0 < \beta$. Здесь, как и в случае 1, следует доопределить функции f и g в точке x_0 по непрерывности и рассмотреть функции $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ на отрезке $[x_0; x]$, где $x_0 < x < \beta$. Тогда функции $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ будут удовлетворять на $[x_0; x]$ всем условиям теоремы Коши. Поэтому $\exists c \in (x_0; x)$, что справедливо равенство (3), где $x_0 < c < x$. Перейдя в равенстве (3) к пределу при $x \to x_0 + 0$ (при этом и $c \to x_0 + 0$), получим требуемое равенство (1).

Случай 3. Пусть $a = x_0$ и $\overset{o}{U}_a = U^-(x_0) \cup U^+(x_0) = (\alpha; x_0) \cup (x_0; \beta)$,

то в силу критерия существования предела в точке x_0 из $\mathbb{R}$ через односторонние пределы, с учетом случаев 1 и 2, имеем:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \Rightarrow \lim_{x\to x_0-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \wedge \lim_{x\to x_0+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A \wedge \lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Случай 4. Пусть $a \in \{-\infty; +\infty; \infty;\}$. Тогда, сделав замену переменной $x = \frac{1}{t}$, или $t = \frac{1}{x}$, этот случай сведем к случаям 1, 2, и 3. В самом деле, в силу указанной замены переменной x, имеем:

$$x \to a \Longleftrightarrow t \to \gamma \in \{0^-, 0^+, 0\}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \Leftrightarrow \lim_{t\to\gamma} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = A \Leftrightarrow \lim_{t\to\gamma} \frac{f'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})}{g'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2}))} = A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\gamma} \frac{(f(\frac{1}{t}))'}{(g(\frac{1}{t}))'} = A \Leftrightarrow \lim_{t\to\gamma} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = A \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A.\bullet$$

Теорема 2. (Правило Лопиталя раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$). Пусть выполнены следующие условия:

1^0. $x_0 \in \mathbb{R}$ и $a \in \{x_0 - 0; x_0 + 0; x_0; -\infty; +\infty; \infty\}$.

2^0. Функции f и g дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности $\overset{o}{U}_a$ точки a, причем $g'(x) \neq 0 \ \ \forall \ \ x \in \overset{o}{U}_a$.

3^0. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$.

4^0. $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, где $A \in \tilde{\mathbb{R}}$.

Тогда справедливо утверждение:

$$\exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Замечание. Несмотря на то, что на практике чаще всего используется теорема 2 для раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$, тем не менее утверждение этой теоремы может быть установлено и без использования условия $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то есть справедлива

Теорема 2′. (Правило Лопиталя в форме Штольца.) Пусть выполняются условия $1^0, 2^0, 4^0$ теоремы 2 и пусть вместо условий 3^0 выполняется только одно условие

$$3'.\ \lim_{x\to a} g(x) = \infty.$$

Тогда равенство (1) справедливо.

▲ Здесь, как и при доказательстве теоремы 1, придется рассмотреть ряд случаев и подслучаев.

Случай 1. Пусть $a = +\infty$ и $\overset{o}{U}(+\infty) = (\beta; +\infty)$, где $\beta > 0$ можно считать настолько большим, что $g(x) \neq 0$ и $g'(x) \neq 0 \ \ \forall x > \beta$, (это возможно в силу условий 2^0 и $3'$). Дальше рассмотрим четыре подслучая: $A \in \mathbb{R}$, $A = +\infty$, $A = -\infty$ и $A = \infty$.

1). Пусть $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, где $A \in \mathbb{R}$, и $\varepsilon > 0$. Тогда, в силу определения конечного предела, $\exists \beta_1 > \beta \ \ \forall x > \beta_1$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < \varepsilon. \tag{4}$$

Пусть $x > x_0 > \beta_1$. Тогда на $[x_0; x]$ будут выполнены все условия теоремы Коши. Следовательно, $\exists c \in (x_0; x)$, что верно равенство

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{5}$$

Так как $c > x_0 > \beta_1$, то в силу неравенства (4), имеем:

$$A - \varepsilon < \frac{f'(c)}{g'(c)} < A + \varepsilon \tag{6}$$

Положим $\varphi(x) := \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$. Тогда, в силу (5) и (6), $\forall x > x_0$ будут справедливы неравенства: $A - \varepsilon < \varphi(x) < A + \varepsilon$, то есть верно утверждение: $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists x_0 > \beta_1 \ \ \forall x > x_0 / |\varphi(x) - A| < \varepsilon$. Следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = A. \tag{7}$$

Но, так как $g(x) \neq 0 \ \ \forall x > x_0$, то

$$\varphi(x) = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \left(1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}\right)\varphi + \frac{f(x_0)}{g(x)}. \tag{8}$$

Ясно, в силу условия $3'$, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x_0)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x_0)}{g(x)} = 0$. Поэтому, переходя в равенстве (8) к пределу при $x \to +\infty$, с учетом равенства (7), получим, что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = A.$$

2). Пусть $A = +\infty$ и $\varepsilon > 0$. Тогда в силу условия 4^0 $\exists \beta_1 > \beta \ \ \forall x > \beta_1$ справедливо неравенство

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} > \varepsilon. \tag{9}$$

Пусть $x > x_0 > \beta_1$. Тогда на $[x_0, x]$ выполняются все условия теоремы Коши. Поэтому $\exists c \in (x_0, x)$, что справедливо равенство (5). Но так как $c > x_0 > \beta_1$, то в силу (9), $\frac{f'(c)}{g'(c)} > \varepsilon$.

Следовательно, $\forall x > x_0 \quad \varphi(x) > \varepsilon$. Значит, $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi = +\infty$. Откуда, в силу равенства (8) и условия $3'$, следует, что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty.$$

3). Пусть теперь $A = -\infty$. Тогда, имеем:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty \quad \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{-f'(x)}{g'(x)} = +\infty \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(-f(x))'}{g'(x)} = +\infty \quad \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{-f(x)}{g(x)} = +\infty \quad \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$

4). Пусть, наконец, $A = \infty$. Тогда, в силу 4^0, $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \beta_1 > \beta \;\; \forall x > \beta_1$

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} \right| > \varepsilon.$$

Дальше точно так же, как и в подслучае 2), $\exists x_0 > \beta_1 \quad \forall x > x_0 / |\varphi(x)| > \varepsilon$. Значит, $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \infty$, откуда из равенства (8) получаем, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Случай 2. Пусть $a = -\infty$. Сделав подстановку $x = -t$, получим, с учетом случая 1):

$$A = \lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{f'(-t)}{g'(-t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{f'(-t)(-1)}{g'(-t)(-1)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{(f(-t))'}{(g(-t))'} = \lim_{t\to+\infty} \frac{f(-t)}{g(-t)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Случай 3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \wedge \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A \wedge \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Случай 4. Пусть теперь $a \in \{x_0 - 0; x_0 + 0; x_0\}$. Тогда сделаем подстановку $t = \frac{1}{x - x_0} \Leftrightarrow x = x_0 + \frac{1}{t}$. Ясно, что $x \to a \Leftrightarrow t \to \gamma \in \{-\infty; +\infty; \infty\}$. Значит,

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \Rightarrow \lim_{t\to\gamma} \frac{f'(x_0 + \frac{1}{t})}{g'(x_0 + \frac{1}{t})} = A \Rightarrow \lim_{t\to\gamma} \frac{f'(x_0 + \frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})}{g'(x_0 + \frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})} = A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\gamma} \frac{(f(x_0 + \frac{1}{t}))'}{(g(x_0 + \frac{1}{t}))'} = A \Rightarrow \lim_{t\to\gamma} \frac{f(x_0 + \frac{1}{t})}{g(x_0 + \frac{1}{t})} \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A. \bullet$$

Lopital rules

K. S. Mami

All the variants of the Lopital rules are considered. The indeterminate forms $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ are proved for university students of mathematics.

