2001 г. Труды ФОРА №6

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ТРЕХМЕРНОЙ СИСТЕМЫ

М. М. Шумафов

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург

В статье устанавливается асимптотическое поведение решений системы "нулевого" приближения для системы Лоренца (при малых значениях параметра b).

1. Хорошо известно, что стандартная система Лоренца

$$\begin{cases} \dot{x} = d(y-x), \\ \dot{y} = -y + rx - xz, \\ \dot{z} = -bz + xy, \end{cases}$$

(b, d, r – положительные константы) при $r > 1$ с помощью замены переменных сводится к виду [1]

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = \eta, \\ \dot{\eta} = -\mu\eta + \sigma - \sigma^3 - \sigma w, \\ \dot{w} = -\alpha w + \beta\sigma^2, \end{cases}$$

где $\alpha = \varepsilon b/\sqrt{d}, \beta = \varepsilon(2d-b)/\sqrt{d}, \mu = \varepsilon(d+1)/\sqrt{d}, \varepsilon = 1/\sqrt{r-1}$.

При анализе динамики системы Лоренца представляет интерес ее исследование при малых значениях параметра b [2]. При этом система "нулевого" приближения имеет вид [3]

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = \eta, \\ \dot{\eta} = -\mu\eta + \sigma - \sigma^3 - \sigma w, \\ \dot{w} = 2\varepsilon\sqrt{d}\sigma^2. \end{cases} \tag{1}$$

Наша задача состоит в исследовании поведения решений системы (1) при $t \to +\infty$.

2. Легко видеть, что состояниями равновесия системы (1) являются все точки оси w : $\{\sigma = 0, \eta = 0\}$.

Теорема 1. *Система (1) обладает глобальной асимптотикой, то есть любое решение системы (1) стремится при $t \to \infty$ к стационарному множеству $S = \{\sigma = 0, \eta = 0, w \in R\}$.*

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию Ляпунова

$$V(\sigma, \eta, w) = 4d\varepsilon^2\sigma^2 + (d+1)(\varepsilon\sigma\sqrt{d} + \eta)^2 + \frac{d+1}{2}(\sigma^2 + w - r\varepsilon^2)^2. \tag{2}$$

Вычислим производную $\dot{V}$ в силу системы (1). После элементарных преобразований получим

$$\dot{V} = -2(d+1)[\varepsilon^3\sigma^2\sqrt{d} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{d}}\eta^2 - 2\varepsilon^2\frac{d-1}{d+1}\sigma\eta].$$

С помощью критерия Сильвестра легко проверяется, что $\dot{V}(\sigma, \eta, w) < 0$ при $(\sigma, \eta) \neq (0, 0)$. Таким образом

$$\dot{V} \leqslant 0 \text{ при всех } (\sigma, \eta, w) \tag{3}$$

Из вида (2) функции V следует, что $V(\sigma, \eta, w) \to +\infty$ при $\sigma^2 + \eta^2 + w^2 \to +\infty$. Далее, так как $\dot{V} = 0$ только в точках стационарного множества S, то множество $\{\dot{V} = 0\}$ не содержит целых траекторий, отличных от состояния равновесия.

Таким образом, для системы (1) выполнены все условия леммы 2.3.2 [4]. Поэтому система (1) обладает глобальной асимптотикой. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Для любого решения системы (1) существует конечный предел (представляющий собой стационарную точку):*

$$\lim_{t\to+\infty}(\sigma(t),\eta(t),w(t))=(0,0,w_*)\in S.$$

Доказательство. В силу теоремы 1

$$\lim_{t\to+\infty}\sigma(t)=0,\ \lim_{t\to+\infty}\eta(t)=0. \tag{4}$$

Остается показать, что существует $\lim_{t\to+\infty}w(t)=w_*\in S$. Функция $V(t)\equiv V(\sigma(t),\eta(t),w(t))$ не возрастает в силу неравенства (3). Поэтому существует конечный предел

$$\lim_{t\to+\infty}V(t)=V_*\geqslant 0,(V_*<+\infty). \tag{5}$$

Отсюда следует, что ω – предельное множество Ω траектории $\{\sigma(t),\eta(t),w(t)\}$ лежит на поверхности $V(\sigma,\eta,w)=V_*$. Но, с другой стороны, $\Omega\subset S$. Следовательно, $\Omega\subset S\bigcap\{V=V_*\}\equiv\Sigma$. Ясно, что множество Σ определяется уравнением $V(0,0,w)=V_*$. Отсюда, используя (2), имеем $w=r\varepsilon^2\pm\sqrt{V_*}$. Так как множество Ω связно, то Ω состоит только из одной точки $w=r\varepsilon^2-\sqrt{V_*}$ или $w=r\varepsilon^2+\sqrt{V_*}$. Это означает, что существует $\lim\limits_{t\to+\infty}w(t)=w_*$, где $w_*=r\varepsilon^2-\sqrt{V_*}$ или $w_*=r\varepsilon^2+\sqrt{V_*}$, причем $w_*\in S$. Тем самым теорема 2 доказана.

Замечание. Доказательство теоремы 2, начиная с соотношения (5), можно было провести немного по другому. А именно, в силу третьего уравнения системы (1) $\dot w(t)\geqslant 0$. Следовательно, существует $\lim\limits_{t\to+\infty}w(t)=w_*(\leqslant+\infty)$. Ясно, что $w_*<+\infty$. В противном случае ($w_*=+\infty$) имели бы: $\lim\limits_{t\to+\infty}V(t)=+\infty$, что противоречит (5). Отсюда следует утверждение теоремы 2.

Теорема 3. *Для любого решения $(\sigma(t),\eta(t),w(t))$ системы (1) с начальными условиями из области $\{\eta>0\}$, справедливы следующие утверждения:*

1). Если $\lim\limits_{t\to+\infty}w(t)=:w_*>1+\frac{\mu^2}{4}$, то траектория $T=\{(\sigma(t),\eta(t),w(t))\}$ стремится при $t\to+\infty$ к своей предельной точке $(0,0,w_*)$ таким образом, что радиус-вектор $r(t)=\{(\sigma(t),\eta(t))\}$ проекции фазовой точки $(\sigma(t),\eta(t),w(t))$ вращается по часовой стрелке (от оси η к оси σ), описывая спираль на плоскости (σ,η).

2). Если $1<w_*\leqslant 1+\frac{\mu^2}{4}$, то траектория T стремится при $t\to+\infty$ к точке $(0,0,w_*)$ так, что ее проекция $T'=\{(\sigma(t),\eta(t))\}$ на плоскость (σ,η) входит в начало координат при $t\to+\infty$ по одному из направлений

$$k_1=-\frac{\mu}{2}-\frac{\sqrt{\mu-4(w_*-1)}}{2},\quad k_2=-\frac{\mu}{2}+\frac{\sqrt{\mu-4(w_*-1)}}{2}.$$

3). Если $w_*<1$, то траектория T стремится при $t\to+\infty$ к точке $(0,0,w_*)$ так, что ее проекция T' входит в начало координат по направлению $k=-\frac{\mu}{2}-\frac{\sqrt{\mu^2-4(w_*-1)}}{2}$.

Доказательство. По теореме 2 любая траектория T системы (1) имеет предельную точку $(0,0,w_*)\in S$.

Так как в достаточно малой окрестности точки $(0,0,w_*)$ траектория T сколь угодно близка к точке $(0,0,w_*)$ и $\lim\limits_{t\to+\infty}w(t)=w_*-0$, то проекция $T'=\{(\sigma(t),\eta(t))\}$ траектории $T=\{(\sigma(t),\eta(t),w(t))\}$ удовлетворяет приближенно системе

$$\begin{cases}\dot\sigma=\eta,\\ \dot\eta=-\mu\eta+\sigma-\sigma^3-\sigma w_*.\end{cases} \tag{6}$$

Таким образом, направлениями вхождения проекции T' в точку $(0,0)$ являются направления собственных векторов линейной части системы (6), которые находятся из уравнения

$$k^2+\mu k+(w_*-1)=0. \tag{7}$$

В случае 1) теоремы 3 уравнение (7) не имеет вещественных корней и, следовательно, имеем фокус на плоскости (σ, η).

В случаях 2) и 3) уравнение (7) определяет два направления соответственно $k_1 < k_2 < 0$ (особая точка $(0,0)$ – узел) и $k_1 < 0 < k_2$ (особая точка $(0,0)$ – седло); при этом в случае 2) проекция T' траектории T входит в начало или по направлению k_1, или по направлению k_2, а в случае 3) – по направлению k_1. Теорема 3 доказана.

Замечание. Остается не рассмотренным случай, когда $w_* = 1$. В связи с этим возникает вопрос: возможен ли вообще случай $w_* = \lim\limits_{t \to +\infty} w(t) = 1$, и если да, то каково асимптотическое поведение траекторий системы (1) в этом случае?

Литература

1. *Белых В.Н.*//Диф. уравнения. 1984. Т. 20. N 10.
2. Странные аттракторы. Сб. статей/Под ред. Л.П. Шильникова и Я.Г. Синая. – М., 1981.
3. *Леонов Г.А.* //Прикл. матем. и мех. (в печати)
4. *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. – М., 1978.

On asymptotic behavior of solutions of some nonlinear three-dimensional system

M. M. Shumafov

In this paper asymptotic behavior of solutions of a three-dimensional system of differential equations being of "system zero approximation" for Lorenz system

$$\begin{cases} \dot{x} = d(y - x), \\ \dot{y} = -y + rx - xz, \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases}$$

is investigated.

Къеlолlэн

Мышъэостэ ыкъоу Шумафэ Мыхьамэт

Мы тезисым къытреlуатэ, таущтэу Лоренц исистемэ $\dot{x} = d(y-x), \dot{y} = -y+rx-xz, \dot{z} = -bz+xy$ апэрэ пэблагъэу иlэ системэм (Лоренц исистемэ аппроксимацие пшlы зыхъукlэ параметрэ b-р цlыкlу дэдэу нулым фэгъэзагъэу фэкlуатэу: $b \to 0$) итраекториехэр асимптотикэ еплъынымкlэ (уахъtэр ин дэдэу хъу зыхъукlэ: $t \to +\infty$) зекlохэра.

