2001 г. №6

Т р у д ы Ф О Р А

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ГРУБЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК СИСТЕМЫ, ОПРЕДЕЛЯЕМОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ В СЛУЧАЕ $Y \neq 0$

Д. К. Мамий

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

Рассматривается система дифференциальных уравнений, определяемая дифференциальным уравнением второго порядка с разрывной правой частью $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$. Получена топологическая классификация грубых особых точек, не лежащих на прямой $y = 0$.

Пусть $G \subset R^2$ конечная область и L – кривая, удовлетворяющая следующим условиям:
1. L – гладкая кривая класса C^k,
2. L – имеет конечную длину,
3. L – делит область G на две области G_1 и G_2.

4. Пересечение кривой L с прямой $y = 0$ состоит из конечного числа компонент: точек и отрезков. Всюду ниже будем считать ориентацию плоскости R^2 заданной. Зададим некоторую ориентацию кривой L. Пусть τ касательный вектор к кривой L в некоторой ее точке, а n – вектор нормали в этой точке, такой что базис τ, n задает ориентацию, согласованную с ориентацией плоскости R^2. Тогда область, внутрь которой направлен вектор n, обозначим за G_1, а вторую область за G_2.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}), \tag{1}$$

где f – функция, определенная в G, принадлежащая в каждой из областей классу $C^k, k \geqslant 1$, вплоть до линии L.

Уравнению (1) соответствует система F – дифференциальных уравнений в области G

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = f(x, y), \end{cases} \tag{2}$$

где $f(x, y) = f_i(x, y)$, $(x, y) \in G_i, i = 1, 2$.

Метрическое пространство систем вида (2) с метрикой

$$\rho_k(F, \tilde{F}) = \max_{i=1,2} ||f_i(x, y) - \tilde{f}_i(x, y)||_k$$

будем обозначать $U^k_{G,L}$.

Свойства грубости систем (2) будем рассматривать относительно возмущений в пространстве $U^k_{G,L}$, то есть возмущений, не меняющих первое уравнение системы (2).

В данной работе исследуются особые точки системы (2), не лежащие на прямой $y = 0$.

Пусть $O(x_0, y_0), y_0 \neq 0$, – особая точка системы (2), лежащая на линии разрыва L, G – окрестность точки $O(x_0, y_0)$, и в этой окрестности L задается уравнением $\Psi(x, y) = 0, \Psi \in C^{k+1}$.

Так как $y_0 \neq 0$ и первое уравнение системы (2) имеет вид $\dot{x} = y$, то точка $O(x_0, y_0)$ в соответствии с §19 [1] не может иметь тип 4, 5, 6. Далее опять же в силу первого уравнения системы особая точка не может иметь тип 1, так как векторы V_1 и V_2, определяемые системой (2), в $O(x_0, y_0)$ не могут быть противонаправлены. Они коллинеарны тогда и только тогда, когда $f_1(x_0, y_0) = f_2(x_0, y_0)$. Следовательно, особая точка может иметь только типы 2 или 3. Необходимое условие, для того чтобы точка была особой, очевидно $\Psi_y(x_0, y_0) \neq 0$. Пусть $\Psi_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда по теореме о неявной функции можно считать, что в области G L является графиком функции $\psi \in C^{k+1}$

$$y = \psi(x) = y_0 + \alpha(x - x_0) + \beta(x - x_0)^2 + \gamma(x - x_0)^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{(k+1)!}\psi^{(k+1)}(x_0)(x - x_0)^{k+1} + o((x - x_0)^{k+1}), x \to x_0.$$

Систему $\tilde{F} \in U^k_{G,L}, k \geqslant 1$ если G –мала, можно записать в виде:

$$\dot{x} = y, \dot{y} = \hat{f}(x, y) = \hat{f}_i(x, y), (x, y) \in G_i, \tag{3}$$

$$\hat{f}_i(x, y) = \hat{c}_i + \hat{a}_i(x - x_0) + \hat{b}_i(y - y_0) + \hat{A}_i(x - x_0)^2 + \hat{B}_i(x - x_0)(y - y_0) + \hat{D}_i(y - y_0)^2 + \ldots$$

$$+\frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{k} C^m_k \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial x^m \partial y^{k-m}}(x_0, y_0)(x - x_0)^m (y - y_0)^{k-m} + \hat{\varphi}_i(x, y), (x, y) \in G_i,$$

$$\hat{\varphi}_i(x, y) = 0(||(x - x_0, y - y_0)||^k), x \to x_0, y \to y_0, i = 1, 2.$$

$$G_1 = \{(x, y)/(x, y) \in G, y > \Psi(x)\}, G_2 = \{(x, y)/(x, y) \in G, y < \Psi(x)\}.$$

Лемма 1. Существует локальный диффеоморфизм D класса C^k, переводящий систему $\hat{F} \in U^k_{G,L}, k \geqslant 1$ вида (3), заданную в окрестности точки $\hat{O}(x_0, y_0), y_0 \neq 0$, в систему F:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x, y) = f_i(x, y), (x, y) \in U_i, i = 1, 2, \end{cases} \tag{4}$$

где

$$f_i(x, y) = c_i + a_i x + b_i(y - 1) + A_i x^2 + B_i x(y - 1) + D_i(y - 1)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{k} C^m_k \frac{\partial^k f_i}{\partial x^m \partial y^{k-m}}(0, 1)x^m (y - 1)^{k-m} + \varphi_i(x, y), \varphi_i(x, y) = 0(||(x, y - 1)||^k),$$

$$x \to 0, y \to 1, (x, y) \in U_i, i = 1, 2.$$

$$U_1 = \{(x, y) \in D(G), y > 1\}, U_2 = \{(x, y) \in D(G), y < 1\}.$$

Если $y_0 > 0$, то $U_i = D(G_i)$,

$$c_i = \frac{\hat{c}_i}{y_0} - \alpha, b_i = \hat{b}_i - 2\alpha,$$

$$a_i = -2\beta y_0 + \hat{a}_i + \alpha\hat{b}_i - \frac{\alpha\hat{c}_i}{y_0},$$

$$A_i = 2\hat{A}_i + \alpha\hat{c}_i - 6\gamma y_0^2 - 2\alpha\beta y_0 + \alpha\hat{B}_i + +2\alpha\hat{D}_i + 2\beta\hat{b}_i - \alpha^2\hat{b}_i\frac{1}{y_0} - \alpha\hat{a}_i - \alpha^2\hat{b}_i - -2\beta\hat{c}_i + \frac{\alpha^2}{y_0}\hat{c}_i, i = 1, 2.$$

Если $y_0 < 0$, то $U_i = D(G_{3-i})$,

$$c_i = \frac{\hat{c}_{3-i}}{y_0} - \alpha, b_i = \hat{b}_{3-i} - 2\alpha,$$

$$a_i = -2\beta y_0 + \hat{a}_{3-i} + \alpha\hat{b}_{3-i} - \frac{\alpha}{y_0}\hat{c}_{3-i},$$

$$A_i = 2\hat{A}_{3-i} + \alpha\hat{c}_{3-i} - 6\gamma {y_0}^2 - 2\alpha\beta y_0 + \alpha\hat{B}_{3-i} + 2\alpha\hat{D}_{3-i} + 2\beta\hat{b}_{3-i} - \alpha^2\hat{b}_{3-i}\frac{1}{y_0} -$$

$$-\alpha\hat{a}_{3-i} - \alpha^2\hat{b}_{3-i} - 2\beta\hat{c}_{3-i} + \frac{\alpha^2}{y_0}\hat{c}_{3-i}, i = 1, 2.$$

Доказательство. Лемма 1 утверждает, что при $y_0 \neq 0$ линию разрыва системы вида (2) можно выпрямить, сохраняя уравнение $\dot{x} = y$. Рассмотрим отображение:

$$\begin{cases} x_1 = \int_{x_0}^{x} \frac{d\tau}{\psi(\tau)}, \\ y_1 = \frac{y}{\psi(x)}. \end{cases}$$

Оно является локальным диффеоморфизмом класса C^k и сохраняет уравнение $\dot{x} = y$. Очевидно, что точка $\hat{O}(x_0, y_0)$ переводится им в точку $O(0,1)$, а кривая $y = \psi(x)$ в $y_1 = 1$. Коэффициенты c_i, a_i, b_i, A_i вычисляются при проведении замены координат. Лемма доказана.

Так как диффеоморфизмы класса C^1, сохраняющие уравнение $\dot{x} = y$, сохраняют свойство грубости для систем $U^1_{G,L}$, то при исследовании грубых особых точек, достаточно рассмотреть системы вида (4). Как было указано выше, особые точки системы (4) могут иметь только типы 2 или 3. Точка $O(0,1)$ имеет тип 2, если $c_1 \cdot c_2 = 0, {c_1}^2 + {c_2}^2 \neq 0$ и тип 3, если $c_1 = 0, c_2 = 0$.

Теорема 1. *Пусть система $F \in U^1_{G,L}$ имеет вид (4) и в точке O(0,1) выполнено условие $c_1 \cdot c_2 = 0$. Если $c_i = 0$ при $i = 1$ или $i = 2$, то особая точка является грубой тогда и только тогда, когда $a_i \cdot c_{3-i} \neq 0$ при том же i. При этом топологические типы особой точки следующие: а) если $c_1 = 0, a_1 > 0, c_2 \neq 0$ или $c_1 \neq 0, c_2 = 0, a_2 < 0$, то $H^2H^2Q^2\overline{Q}^2$, б) если $c_1 = 0, a_1 < 0, c_2 \neq 0$ или $c_1 \neq 0, c_2 = 0, a_2 > 0$, то $K^2\overline{K}^2$.*

Доказательство. Часть утверждения теоремы, относящаяся к топологической классификации вытекает из /S 19, [1]. Достаточность условия грубости следует из следствия 1 теоремы 2 /S 19 [1].

Докажем необходимость. Пусть $c_1 = 0$. Случай $c_2 = 0$ рассматривается аналогично. рассмотрим два случая: $a_1 = 0, c_2 \neq 0$ и второй $c_2 = 0$. Пусть $a_1 = 0, c_2 \neq 0$ и F_ε возмущение системы F, следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \begin{cases} \varepsilon x + f_1(x,y), (x,y) \in U_1, \\ f_2(x,y), (x,y) \in U_2. \end{cases} \end{cases}$$

Система F_ε ε –близка системе F в достаточно малой окрестности точки O(0,1). При $\varepsilon > 0$ особая точка имеет топологический тип $H^2H^2Q^2\bar{Q}^2$, а при его $\varepsilon < 0$, топологический тип $K^2\bar{K}^2$. Следовательно, система F не является грубой. Пусть теперь $c_1 = 0, c_2 = 0$. Рассмотрим функции

$$F^i_n(x) = f_i(x,1), i = 1,2.$$

Так как $c_1 = 0, c_2 = 0$, то каждая из этих функций в точке $x = 0$ имеет нуль по меньшей мере кратности 1. Если $\tilde{F} \in U^1_{G,L}$ система близкая к F, то нули соответствующих ей функций $\tilde{F}^i_n$ определяют особые точки системы $\tilde{F}$. Рассмотрим возмущение $F_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ системы F следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \begin{cases} \varepsilon + f_1(x,y), (x,y) \in U_1, \\ \varepsilon + f_2(x,y), (x,y) \in U_2. \end{cases} \end{cases}$$

Очевидно, что существуют сколь угодно малые $\varepsilon_i, i = 1,2$, такие, что функции $F^i_{\varepsilon_1,\varepsilon_2 n}$ имеют нули близкие к $x = 0$. Поэтому система $F_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ при сколь угодно малом $\varepsilon = max(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ может иметь в малой окрестности точки $O(0,1)$ две особые точки, то есть система F в окрестности точки $O(0,1)$ является негрубой. Теорема доказана.

Следствие 1. Особая точка $O(0,1)$ типа 3 системы (4) является негрубой.

Теорема 1 позволяет исследовать грубость особой точки $\hat{O}(x_0, y_0)$ системы (3). Для этого достаточно воспользоваться выражением коэффициентов $c_i, a_i, b_i, i = 1,2$ системы (4) через коэффициенты $\hat{c}_i, \hat{a}_i, \hat{b}_i, i = 1,2$ системы (3). Сделаем это для случая $y_0 > 0$.

Следствие 2. Пусть система $\hat{F} \in U^1_{G,L}$ имеет вид (3), и в точке $\hat{O}(x_0, y_0)$ выполнено условие $(\hat{c}_1 - \alpha y_0)(\hat{c}_2 - \alpha y_0) = 0$. Если $\hat{c}_i = \alpha y_0$ при $i = 1$ или $i = 2$, то особая точка является грубой тогда и только тогда, когда

$$(\hat{a}_i + \alpha\hat{b}_i - \frac{\alpha\hat{c}_i}{y_0} - 2\beta y_0)(\hat{c}_{3-i} - \alpha y_0) \neq 0.$$

При этом топологические типы особой точки следующие:

а) Если

$$\hat{c}_1 = \alpha y_0, \hat{a}_1 + \alpha\hat{b}_1 - \frac{\alpha\hat{c}_1}{y_0} > 2\beta y_0, \hat{c}_2 \neq \alpha y_0$$

или

$$\hat{c}_1 \neq \alpha y_0, \hat{c}_2 = \alpha y_0, \hat{a}_2 + \alpha\hat{b}_2 - \frac{\alpha\hat{c}_2}{y_0} < 2\beta y_0,$$

то $H^2H^2Q^2\overline{Q}^2$.

б) Если

$$\hat{c}_1 = \alpha y_0, \hat{a}_1 + \alpha\hat{b}_1 - \frac{\alpha\hat{c}_1}{y_0} < 2\beta y_0, \hat{c}_2 \neq \alpha y_0$$

или

$$\hat{c}_1 \neq \alpha y_0, \hat{c}_2 = \alpha y_0, \hat{a}_2 + \alpha\hat{b}_2 - \frac{\alpha\hat{c}_2}{y_0} > 2\beta y_0,$$

то $K^2\overline{K}^2$.

Следствие 3. Топологические нормальные формы грубых особых точек системы (3) следующие: а) для точек типа $H^2H^2Q^2\overline{Q}^2$ (рис.1)

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \begin{cases} x, y > 1, \\ 1, y < 1. \end{cases} \end{cases}$$

б) для точек типа $K^2\overline{K}^2$ (рис.2)

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \begin{cases} -x, y > 1, \\ 1, y < 1. \end{cases} \end{cases}$$

Рис.1 Рис. 2

Учитывая теорему 1 и определение функций F_n^1 и F_n^2, необходимое и достаточное условие грубости особой точки $\hat{O}(x_0, y_0)$ системы (3) можно сформулировать и иначе.

Следствие 4. Точка $\hat{O}(x_0, y_0)$ является грубой особой точкой системы F вида (4) тогда и только тогда, когда $x = x_0$ является простым нулем одной из функций F_n^1 или F_n^2 и не является нулем другой.

Мы провели полное исследование грубых особых точек системы (2), не лежащих на оси $y = 0$.

Литература

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985.

The topological classification of structurally stable singular points of system, determined by the second-order differential equation with discontinuous right-hand side in case $y \neq 0$

D. K. Mami

The system of differential equations determined by the second-order differential equation with discontinuous right-hand side is considered. The topological classification of structurally stable singular points, not lying on the line $y = 0$ is given.

