О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛАХ ОДНОЙ АВТОНОМНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Д. С. Ушхо

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

Для дифференциальной системы с аналитическими правыми частями, сводящейся к системе нелинейных колебаний, найдены достаточные условия существования вокруг начала координат хотя бы одного предельного цикла и хотя бы двух предельных циклов.

Пусть нам предложена система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = yf(x), \quad \frac{dy}{dt} = g(x) + yG(x, y) \tag{1}$$

для которой всюду в дальнейшем предполагаются f и g – непрерывно дифференцируемыми на R, а $G'_x(x, y)$ и $G'_y(x, y)$– непрерывными на R^2.

Поставим задачу: найти достаточные условия существования предельных циклов системы (1), окружающих начало координат $O(0, 0)$.

Для этого сначала потребуем выполнение условий:

$$f(0) > 0, \tag{2}$$

$$g'(0) < 0, \tag{3}$$

$$g(0) = 0. \tag{4}$$

В силу непрерывности функций f и g' найдутся сколь угодно малые положительные числа ε_1 и ε_2, такие, что

$$f(x) > 0 \quad \text{на} \quad (-\varepsilon_1; \varepsilon_1), \tag{5}$$

$$g'(x) < 0 \quad \text{на} \quad (-\varepsilon_2; \varepsilon_2). \tag{6}$$

Из (4) и (6) следует, что $g(x) > 0 \quad (g(x) < 0)$ на $(-\varepsilon_2, 0) \quad ((0, \varepsilon_2))$. Нетрудно видеть, что общий интеграл дифференциального уравнения траекторий системы

$$\frac{dx}{dt} = yf(x), \quad \frac{dy}{dt} = g(x) \tag{7}$$

имеет вид $y^2 = 2\int \frac{g(x)}{f(x)}dx + C$, где C– произвольная постоянная.

Введем в рассмотрение функцию $H(x) = \int\limits_0^x \frac{g(s)}{f(s)}ds$. Пусть $\varepsilon = min(\varepsilon_1; \varepsilon_2)$, тогда в силу (5) и (6)

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in (-\varepsilon; \varepsilon), \quad g(x) > 0 (g(x) < 0) \quad \forall x \in (-\varepsilon; 0) \quad (\forall x \in (0; \varepsilon)),$$

откуда следует, что $H \nearrow (H \searrow)$ на $(-\varepsilon; 0)((0; \varepsilon))$, то есть $x = 0$ – точка max функции H.

Очевидно, путем подбора соответствующего значения произвольной постоянной C, независимо от значения $H(0)$, можно добиться того, чтобы выполнялись неравенства: $F_1(0) > 0, F_1(\alpha) = F_1(\beta) = 0$, где $F_1(x) = 2H(x) + C, \quad \alpha \in (-\varepsilon; 0), \quad \beta \in (0; \varepsilon)$.

Поэтому уравнение

$$y^2 - F_1(x) = 0 \tag{8}$$

задает замкнутый цикл, симметричный относительно прямой $y = 0$ и окружающий точку $O(0; 0)$.

Цикл (8) может служить инструментом для улавливания предельных циклов, окружающих точку равновесия $O(0; 0)$. В самом деле, системы (1) и (7) обладают одними и теми же особыми точками на прямой $y = 0$ (впрочем, никакая особая точка системы (1), не лежащая на оси абсцисс, не может быть окружена предельным циклом, ибо для нее $f(x_i) = 0$ и прямая $x = x_i$ состоит из траекторий (1), x_i–абсцисса особой точки). Последнее обстоятельство делает возможным рассмотрение (7) в качестве системы сравнения по отношению к системе (1).

А именно, если цикл (8) пересекают траектории системы (1), выходя из него (входя в него), и начало координат при этом является устойчивой (неустойчивой) точкой покоя типа "фокус" или "узел", то по принципу кольца [1] гарантировано существование по крайней мере одного неустойчивого (устойчивого) предельного цикла вокруг $O(0;0)$.

Указанная идея лежит в основе теоремы из работы [2], согласно которой гарантируется существование хотя бы одного предельного цикла вокруг $O(0;0)$

Приведем достаточные условия реализуемости изложенной выше идеи, удобные для конструирования конкретных систем с предельными циклами.

Теорема 1. *Пусть система (1) удовлетворяет условиям:*

1) $f(x) > 0$ *на* $(a;b)$;
2) $g'(0) < 0$;
3) $g(x) = 0$ *на* $(a;b)$ *только в двух точках* $x = k, \quad x = 0$;
4) $F(0) > 0, \quad F(k) < 0$, *кроме того, существует интервал* $(a;a{+}\delta_1) \subset (a;0)$ $((b-\delta_2;b) \subset (0;b))$, *на котором* $F(x) < 0$ *при* $k > 0 \quad (k < 0)$;
5) $G(0;0) < 0, \quad G(x,y)|_{(x;y)\in L} > 0$ $(G(0;0) > 0, G(x;y)|_{(x;y)\in L} < 0)$.

Тогда начало координат окружает по крайней мере один неустойчивый (устойчивый) предельный цикл.

Замечание 1. $F(x) = 2H(x){+}m$, где $m-$ некоторая постоянная. δ_1, δ_2- положительные числа. $L-$ кривая, заданная уравнением $y^2 - F(x) = 0$.

Отметим, что условия 1)–4) являются достаточными для существования замкнутого цикла L, охватывающего единственное состояние равновесия $O(0;0)$ системы (1), принадлежащее интервалу $(a;b)$, а условие 5) достаточно для того, чтобы цикл L был циклом без контакта для траекторий системы (1).

В самом деле, производная функции $\Phi(x,y) = y^2 - F(x)$ в силу системы (1) имеет вид:

$$\frac{d\Phi}{dt} = 2y^2 G(x,y). \tag{9}$$

Из 5) и (9) видно, что траектории системы (1) при $t \to +\infty$ выходят из L (входят в L), а начало координат – грубый устойчивый (неустойчивый) фокус или узел.

Лемма 1. Пусть $O(0;0)-$ точка покоя с чисто мнимыми характеристическими корнями аналитической системы

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x,y). \tag{10}$$

Тогда O является негрубым фокусом, если $P(x;y) \equiv 0$ и в некоторой достаточно малой проколотой окрестности $\overset{0}{\bigcup}_l(O)$ функция $\Delta(x;y) = \frac{Q(x;y)}{P(x;y)} + \frac{Q(x;-y)}{P(x;-y)}$ – знакопостоянна при $y \neq 0$.

В самом деле, начало координат является особой точкой второй группы, то есть негрубым фокусом или центром [3]. Но в силу работы [4] система не имеет ни одной замкнутой траектории в $\overset{0}{\bigcup}_l(O)$, а значит $O-$негрубый фокус.

Замечание 2. Если траектории системы (10), расположенные в $\overset{0}{\bigcup}_l(O)$ правее оси Oy, пересекают ось абсцисс в направлении убывания y при $t \to +\infty$, то $O-$ устойчивый(неустойчивый) фокус при $\Delta(x,y) < 0(> 0)$ в $\overset{0}{\bigcup}_l(O)$. Очевидно, если при $t \to +\infty$, траектории пересекают ось абсцисс в направлении возрастания y, то фокус O будет неустойчивым(устойчивым).

Лемма 2. Пусть особая точка второй группы $O(0;0)$ системы (10) принадлежит овалу S кривой $\Delta(x,y) = 0$, при переходе через который функция $\Delta(x,y)$ меняет знак на противоположный. Тогда O является негрубым фокусом, если для траекторий системы (10) существует цикл r однократного пересечения, охватывающий S и единственную особую точку $O(0;0)$.

Доказательство. Допустим, что $O-$ центр. Тогда замкнутые траектории, окружающие центр, заполняют некоторую ячейку [5], границу которой составляют целые особые траектории по терминологии [5]. В качестве границы не может служить предельный цикл, ибо в таком случае внутри одной и той же ячейки окажутся как замкнутые, так и незамкнутые траектории, что противоречит теореме 14 [5,с.58]. Поэтому ячейку, заполненную замкнутыми траекториями, окружающими центр O, отделяет от других ячеек разве что сепаратрисный цикл. Но и это невозможно, так как внутри r нет состояний равновесия, кроме O, и r может пересечь лишь одна (либо $\omega-$ сепаратриса, либо $\alpha-$сепаратриса). Таким образом, $O(0;0)-$ негрубый фокус.

Теорема 2. *Пусть система (1) удовлетворяет условиям 1)-4) теоремы 1 и, кроме этого* $G(0;0)=0$, $\quad G(x,y)<0(>0)$ *в некоторой проколотой окрестности точки* $O(0;0)$. *Тогда, если* $G(x,y)|_(x,y)\in L>0(<0)$, *то* $O(0;0)-$ *устойчивый(неустойчивый) негрубый фокус, окруженный по крайней мере одним неустойчивым (устойчивым) предельным циклом.*

Справедливость теоремы 2 следует из теоремы и леммы 1 с учетом того, что

$$\Delta(x,y)\equiv\frac{d\Phi}{dt}=y^2G(x,y).$$

Замечание 3.Теорема 2 позволяет избежать громоздких вычислений, связанных с нахождением фокусных величин для установления характера устойчивости негрубого фокуса (для сравнения заметим, что таких рецептов не дается в упомянутой выше работе [2]).

Замечание 4. В условиях знакопостоянства функции $G(x,y)$ на цикле L, $G(0;0)=0$ либо начало координат является изолированной точкой кривой $G(x,y)=0$, либо принадлежит овалу r кривой $G(x,y)=0$, при переходе через который знак функции $G(x,y)$ либо не меняется на противоположный, либо меняется на противоположный. Во всех перечисленных случаях $O(0;0)-$ негрубый фокус, и лишь в случае изменения знака $G(x,y)$ остается открытым вопрос о характере устойчивости этого фокуса.

Замечание 5. Предельный цикл, удовлетворяющий условиям теоремы 1, расположен внутри цикла L и пересекает овал кривой $\Delta(x,y)=0$ или, что то же самое $G(x,y)=0$.

Далее считаем выполненными для системы (1) следующие условия:

$$f(x)g'(x)<0 \quad \text{на} R \tag{11}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\pm\infty \tag{12}$$

$$G(0;0)G(x,y)|_{(x,y)\in L_1}<0 \tag{13}$$

где L_1-замкнутая кривая, заданная уравнением

$$y^2-2H(x)-M=0 \qquad (14),$$

где $M\in R$, уравнение $G(x,y)=0$ определяет две непересекающиеся замкнутые кривые, при переходе через которые функция $G(x,y)$ меняет знак на противоположный и которые окружают особую точку $O(0;0)$. Имеет место

Теорема 3. *Пусть дифференциальная система (1) удовлетворяет условиям (4),(11),(12),(13), причем замкнутый цикл* L_1 *задается уравнением (14), а уравнение* $G(x,y)=0$ *определяет две замкнутые кривые* l_1 *(внутренняя) и* l_2 *(внешняя) с отмеченными выше свойствами. Тогда начало координат* $O(0;0)$ *окружают по крайней мере два предельных цикла, из которых ближайший к началу координат является устойчивым (неустойчивым), если* $G(0;0)>0 \quad (G(0;0)<0)$.

Доказательство. Условия (4) и (11) обеспечивают существование функции $H(x)$ с точкой максимума $x=0$. При этом $H\nearrow(\searrow)$ на промежутке $(-\infty,0] \quad ([0;+\infty))$. Принимая во внимание условие (12), убеждаемся в отсутствии горизонтальных асимптот графика функции $H(x)$. Это значит, что $\forall M_1\in R$ и $M_1>M_0$, где $M_0=-2H(0)$ существует замкнутый цикл $y^2-2H(x)-M_1=0$. При этом, если $M_0<M_i<M_j$, то цикл $L_i: \quad y^2-2H(x)-M_i=0$ расположен внутри цикла $L_j: \quad y^2-2H(x)-M_j=0$. Пусть $G(0;0)>0 \quad (G(0;0)<0)$. Тогда в силу (13) цикл L_1 расположен между l_1 и l_2, а начало координат является простым неустойчивым (устойчивым) состоянием равновесия типа "узел" или "фокус". Поэтому траектории системы (1) пересекают L_1, входя внутрь (выходя наружу). По принципу кольца [1] начало координат окружает по крайней мере один устойчивый (устойчивый) предельный цикл, пересекающий l_1 и расположенный внутри L_1.

Из выше приведенных рассуждений следует существование $M_2 > M_1$ так, что цикл $L_2 : y^2 - 2H(x) - M_2 = 0$ охватывает кривую l_2. Следовательно, траектории системы (1) пересекают L_2, выходя наружу (входя внутрь), и по принципу кольца между кривыми L_1 и L_2 расположен по крайней мере один неустойчивый (устойчивый) предельный цикл, окружающий $O(0;0)$. Теорема доказана.

Замечание 6. Утверждение теоремы 3 остается в силе, если число замкнутых ветвей кривой $G(x,y) = 0$ четно, в случае же нечетного числа ветвей теорема гарантирует существование хотя бы одного предельного цикла(см.Т.1)

Замечание 7. На интервале $(a;b)$ в условиях теорем 1 и 2 и на всей числовой прямой в условиях теоремы 3 систему (1) можно привести к системе нелинейных колебаний

$$\frac{dx}{d\tau} = y, \frac{dy}{d\tau} = \frac{g(x)}{f(x)} + y\frac{G(x,y)}{f(x)}, d\tau = f(x)dt,$$

которая в свою очередь эквивалентна дифференциальному уравнению нелинейных колебаний

$$\ddot{x} - \dot{x}W(x;\dot{x}) - K(x) = 0, \tag{15}$$

где

$$K(x) = \frac{g(x)}{f(x)}, W(x;\dot{x}) = \frac{G(x;\dot{x})}{f(x)}, \dot{x} = \frac{dx}{d\tau}, \ddot{x} = \frac{d^2x}{d\tau^2}.$$

Известные в теории колебаний уравнения Ван-дер-Поля и Рэлея являются частными случаями уравнения (15).

Приведем примеры, иллюстрирующие результаты проведенного исследования.

Пример 1.

$$\frac{dx}{dt} = y(x+5), \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + y(25x^2 + 400y^2 - 1). \tag{16}$$

Система (16) удовлетворяет всем условиям теоремы 1.

Здесь $F(x) = \frac{x^2}{8} - \frac{9x}{4} + \frac{45}{4}\ln|x+5| - 18$.

Цикл L задан на отрезке $[\alpha;\beta]$, где $\alpha \in (-4;-0,5)$, $\beta \in (1;4)$. Траектории (16) пересекают L, выходя наружу, так как $G(x;y)|_{(x,y)\in L} > 0$, а $O(0;0)$ – простой устойчивый фокус.

Следовательно, в открытом прямоугольнике

$$R = \{(x;y)|x| < 4, |y| < \sqrt{(45/4)\ln 5 - 18}\}$$

система (16) имеет по крайней мере один неустойчивый предельный цикл.

Пример 2.

$$\frac{dx}{dt} = y(x+5), \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + y(x^2 + xy + 5y^2)(25x^2 + 400y^2 - 1). \tag{17}$$

Система (17) удовлетворяет условиям 1)–4) теоремы 1 и замечания 2 к лемме 1. Поэтому негрубый фокус $O(0,0)$ (устойчивый) окружает по крайней мере один неустойчивый предельный цикл, расположенный в прямоугольнике R.

Пример 3.

$$\frac{dx}{dt} = y(x^2+1), \frac{dy}{dt} = -3x - x^3 + y(x^2 + 4y^2 - 4)(49x^2 + 100y^2 - 4900). \tag{18}$$

Система (18) удовлетворяет условиям теоремы 3, причем замкнутый цикл L_1 задается уравнением $y^2 + x^2 + 2\ln(x^2+1) - 25 = 0$ и точка $O(0;0)$ является неустойчивым узлом. Цикл L_1 расположен в кольцевой области, ограниченной эллипсами $l_1 : x^2 + 4y^2 - 4 = 0$, $l_2 : 49x^2 + 100y^2 - 4900 = 0$. Замкнутый цикл $L_2 : y^2 + x^2 + 2\ln(x^2+1) - 200 = 0$ охватывает кривую l_2. Следовательно, неустойчивый узел $O(0;0)$ окружает по крайней мере один устойчивый предельный цикл, пересекающий l_1 и расположенный в внутри L_1 и один неустойчивый предельный цикл, пересекающий l_2 и расположенный между L_1 и L_2.

Литература

1. *Андронов А.А. и др.* Качественная теория динамических систем второго порядка. – - М.:Наука, 1966.
2. *Назмутдинов А.Т.*// Волжский математический сборник, вып. 16, 1973.– С. 223-228.
3. *Амелькин В.В., Лукашевич Н.А., Садовский А.П.* Нелинейные колебания в системах второго порядка. – Мн.:Изд-во БГУ, 1982.
4. *Авдонин Н.И.*//Тез. докл. молод. науч. работников Горьк. ун-та, 1965. – С. 5–6.
5. *Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. – М.: Наука, 1976.

On limit cycles of some autonomous differential equation

D. S. Ushkho

For differential system with right-hand analytical parts the sufficient conditions existence around origin of coordinates one limit cycle and two limit cycles are founded.

