

## ОБ ОБОБЩЕНИИ ТРЕТЬЕЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА-БИЦАДЗЕ

А.И. Куев

Майкопский государственный технологический институт, г. Майкоп

В этой статье для уравнения Лаврентьева-Бицадзе решаются некоторые краевые задачи.

В этом пункте в качестве модельного уравнения с частными производными второго порядка от двух независимых переменных и гиперболического типа рассматривается уравнение

$$u_{xx} - u_{yy} = 0 \quad (1)$$

а в качестве модельного уравнения смешанного типа будет рассмотрено уравнение Лаврентьева – Бицадзе

$$\text{sign } y \, u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (2)$$

1. Об обобщении задачи 3 для уравнения (1).

Задача 1. Найти регулярное в  $\Delta$  решение  $u(z) \in C(\bar{\Delta})$  уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u_y(x, 0) = v(x), \quad \forall x \in J \quad (3)$$

$$\alpha(x)u\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) + \beta(x)u\left(\frac{x+1}{2}, \frac{x-1}{2}\right) = \delta(x), \quad \forall x \in \bar{J} \quad (4)$$

$$\beta(1)u(1, 0) = \beta_1, \quad \alpha(0) \neq 0, \quad \alpha(1) \neq 0, \quad (5)$$

где  $v(x) \in C^1(J)$  и в точках  $x=0, 1$  может обратиться в бесконечность интегрирующего порядка:

$$\alpha(x), \beta(x), \delta(x) \in C(\bar{J}) \cap C^2(J) \quad (6)$$

причем,

$$\alpha(x) + \beta(x) \neq 0, \quad \forall x \in \bar{J} \quad (7)$$

и наконец  $\beta_1$  заданное число, которое равно нулю при  $\beta(1) = 0$ .

Существование и единственность решения задачи 1 для уравнения (1) доказаны А.М.Нахушевым в случае, когда  $\alpha(x) = 1$  [1].

Покажем, что задача 1 поставлена корректно в случае, когда  $\alpha(x) \neq 1$ .

Общее решение (регулярное) в области  $\Delta$  уравнения (1) удовлетворяющее равенству (3) можно представить в виде

$$u(z) = \psi(x+y) + \psi(x-y) - \psi(0) + \int_0^{x+y} v(t) dt, \quad (8)$$

где  $\psi(x) \in C(\bar{J}) \cap C^2(J)$  – произвольная функция. Удовлетворив (8) краевому условию (4) в силу (7) найдем

$$\psi(x) = \frac{\delta(x) - \beta(x)[\psi(1) - \psi(0)]}{\alpha(x) + \beta(x)} - \frac{\beta(x)}{\alpha(x) + \beta(x)} \int_0^x v(t) dt \quad (9)$$

С учетом (9) из (8) при  $y = 0$  получим

$$\tau(x) = \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x) + \beta(x)} \int_0^x v(t) dt + 2 \frac{\delta(x) - \beta(x)[u(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) - \tau(0)]}{\alpha(x) + \beta(x)} - \tau(0) \quad (10)$$

где  $u(x, 0) = \tau(x)$ . Из (4) и (5) следует, что

$$u\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{\delta(1)}{\alpha(1)} - \frac{\beta_1}{\alpha(1)} \quad (11)$$

$$\tau(0) = \frac{\delta(0) - \beta(0)[\delta(1) - \beta_1]}{\alpha(0)} \quad (12)$$

поэтому задача 1 корректна и ее решение выписывается в явном виде по формулам (8) и (9). Можно отметить, что в случае замены (5) условием

$$\beta(0)\beta(1) + \alpha(0)[2\beta(1) + \alpha(1)] \neq 0 \quad (13)$$

задача поставлена корректно.

Для доказательства однозначности  $\psi(1)$  и  $\psi(0)$  составляем систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha(1)u\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) + \beta(1)u(1,0) = \delta(1) \\ \alpha(0)u(0,0) + \beta(0)u\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \delta(0) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \alpha(1)\psi(1) + 2\beta(1)\psi(1) - \beta(1)\psi(0) = \int_0^1 v(t)dt + \delta(1) \\ \alpha(0)\psi(0) + \beta(0)\psi(1) = \delta(0) \end{cases} \quad (14)$$

Отсюда мы видим, что для однозначности  $\psi(1)$  и  $\psi(0)$  необходимо и достаточно выполнение условия (3).

2. Об обобщении задачи 3 для уравнения Лаврентьева – Бицадзе.

Задача 2. Найти регулярное в области  $\Omega$  решение  $u(z)$  уравнения (2), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(z) = \varphi(z), \quad \forall z \in \sigma \quad (15)$$

$$\text{и } \alpha(x)u\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) + \beta(x)u\left(\frac{x+1}{2}, \frac{x-1}{2}\right) = \delta(x), \quad \forall x \in \bar{J} \quad (16)$$

где  $\varphi(x)$ ,  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$ ,  $\delta(x)$  – заданные непрерывные функции, причем,

$$\alpha(x), \beta(x), \delta(x) \in H(\bar{J}) \cap C^2(J), \quad \alpha(x), \beta(x), \delta(x) \in C^1(\bar{J}) \cap C^3(J)$$

Заданные функции  $\varphi(x)$ ,  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$ ,  $\delta(x)$  связаны условием согласованности

$$\alpha(0)\varphi(0) + \frac{\beta(0)}{\alpha(0)}[\delta(1) - \beta(1)\varphi(1)] = \delta(0), \quad \text{где } \alpha(0) \neq 0 \quad (17)$$

$$\text{и } \alpha(x) + \beta(x) \neq 0, \quad \forall x \in \bar{J} \quad (18)$$

Существование и единственность решения задачи 2 для уравнения (1) доказаны А.М.Нахушевым в случае, когда  $\alpha(x) = 1$ .

Известный принцип экстремума А.В.Бицадзе [2] применительно к задаче 2 формулируется следующим образом.

Пусть

$$\beta'(x)\alpha(x) - \alpha'(x)\beta(x) \geq 0, \quad \forall x \in J_1 = \{x | x \in J, \beta(x) \neq \alpha(x)\} \quad (19)$$

$$\delta(x) = 0, \quad \varphi(1) = 0 \quad (20)$$

тогда положительный максимум и отрицательный минимум решения  $u(z)$  задачи 2 в замкнутой области  $\bar{\Omega}$  достигается лишь на  $\sigma$

Действительно, из разрешимости задачи 1 непосредственно вытекает, что любое решение  $u(z)$  задачи 2, если оно существует, удовлетворяет соотношению (10), которое в силу (7) и (20) имеет вид

$$\tau(x) = \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x) + \beta(x)} \int_0^x v(t) dt$$

или

$$\tau(x) \frac{2\beta'(x)\alpha(x) - 2\alpha'(x)\beta(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} + \frac{\alpha(x) + \beta(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \tau'(x) = v(x), \forall x \in J_1 \quad (21)$$

где  $\tau(x) = u(x, -0)$ ,  $u_y(x, -0) = v(x)$ .

Предположим, что  $\max_{\Omega_1} u(z) = u(\zeta) > 0$ .

Очевидно  $\zeta \notin \Omega_1$ . Пусть  $\zeta \in J$ . Тогда из (21) при  $\delta(x)=0$ ,  $\varphi(1)=0$  и при выполнении условия (19) имеем, что  $v(\xi) > 0$ , где  $\zeta = \operatorname{Re} \zeta$ . Последнее противоречит принципу Зарембо-Жиро [3], следовательно,  $\zeta \in \sigma$ . Таким образом задача 2 имеет не более одного решения, если выполнены условия (19) и (20).

Переходя к доказательству существования решения задачи 2 будем предполагать, что

- 1) кривая  $\sigma$  совпадает с нормальным контуром  $\sigma_0: |z - 1/2| = 1/2$ ;
- 2) функция  $\varphi(x)$  представима

$$\varphi(z) = x(1-x)\varphi_0(x), \quad \varphi_0(x) \in C(\bar{J}) \quad (22)$$

Как и в случае задачи Трикоми, интегро-дифференциальное соотношение между  $\tau(x)$  и  $v(x)$ , приведенное на  $J$  из эллиптической части области  $\Omega$ , имеет вид

$$\tau(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left( \frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2+x} \right) v(t) dt = \Phi^1(x), \quad (23)$$

где  $\Phi(x) = \frac{x(1-x)}{\pi} \int_0^1 \varphi_0(t) [t(1-t)]^{1/2} [x^2 - (2x-1)t]^{-1} dt$  и в силу (22) функция

$\Phi(x) \in C^1(J) \cap C^\infty(J)$  при  $x \rightarrow 0, 1$  обращается в нуль порядка не ниже единицы. Принимая во внимание (19), (21), (22), (23) нетрудно увидеть, теперь, что задача 2 эквивалентна (в смысле разрешимости) следующему сингулярному интегральному уравнению:

$$\begin{aligned} & [\alpha(x) - \beta(x)]v(x) + \frac{\alpha(x) + \beta(x)}{\pi} \int_0^1 \left( \frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2+x} \right) v(t) dt + \\ & + \frac{2[\alpha'(x)\beta(x) - \beta'(x)\alpha(x)]}{\alpha(x) + \beta(x)} \int_0^x v(t) dt = f(x) \end{aligned} \quad (24)$$

где  $f(x) \in C^1(\bar{J}) \cap C^\infty(J)$  – известная функция.

Уравнение (24) известным методом регуляризации Карлемана-Векуа [3] можно свести к эквивалентному уравнению Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которого следует из единственности решения задачи 2.

### Литература

1. Нахушев А.М. Дифференциальные уравнения. – 1969. – № 1.
2. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. – М.: Изд-во АН СССР. – 1959.
3. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Физматгиз. – 1962.

## Generalization of the third problem for Lavrentev-Bizadse wave equation

A.I. Kuev

The some edge problems for Lavrentev-Bizadse wave equation are solved.