# ОБ ОБОБЩЕНИИ ТРЕТЬЕЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА-БИЦАДЗЕ

**А.И. Куев**

*Майкопский государственный технологический институт, г. Майкоп*

В этой статье для уравнения Лавреньева-Бицадзе решаются некоторые краевые задачи.

В этом пункте в качестве модельного уравнения с частными производными второго порядка от двух независимых переменных и гиперболического типа рассматривается уравнение

$$u_{xx} - u_{yy} = 0 \tag{1}$$

а в качестве модельного уравнения смешанного типа будет рассмотрено уравнение Лаврентьева – Бицадзе

$$\operatorname{sign} y\, u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{2}$$

1. Об обобщении задачи 3 для уравнения (1).

Задача 1. Найти регулярное в $\Delta$ решение $u(z) \in C(\overline{\Delta})$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u_y(x,0) = \nu(x), \quad \forall x \in J \tag{3}$$

$$\alpha(x) u\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) + \beta(x) u\left(\frac{x+1}{2}, \frac{x-1}{2}\right) = \delta(x), \quad \forall x \in \overline{J} \tag{4}$$

$$\beta(1) u(1,0) = \beta_1, \quad \alpha(0) \neq 0, \ \alpha(1) \neq 0, \tag{5}$$

где $\nu(x) \in C^1(J)$ и в точках $x$=0,1 может обратиться в бесконечность интегрирующего порядка:

$$\alpha(x),\ \beta(x),\ \delta(x) \in C(\overline{J}) \cap C^2(J) \tag{6}$$

причем,

$$\alpha(x) + \beta(x) \neq 0, \ \forall x \in \overline{J} \tag{7}$$

и наконец $\beta_1$ заданное число, которое равно нулю при $\beta(1)=0$.

Существование и единственность решения задачи 1 для уравнения (1) доказаны А.М.Нахушевым в случае, когда $\alpha(x) = 1$ [1].

Покажем, что задача 1 поставлена корректно в случае, когда $\alpha(x) \neq 1$.

Общее решение (регулярное) в области $\Delta$ уравнения (1) удовлетворяющее равенству (3) можно представить в виде

$$u(z) = \psi(x+y) + \psi(x-y) - \psi(0) + \int_0^{x+y} \nu(t)\,dt, \tag{8}$$

где $\psi(x) \in C(\overline{J}) \cap C^2(J)$ –произвольная функция. Удовлетворив (8) краевому условию (4) в силу (7) найдем

$$\psi(x) = \frac{\delta(x) - \beta(x)[\psi(1) - \psi(0)]}{\alpha(x) + \beta(x)} - \frac{\beta(x)}{\alpha(x) + \beta(x)} \int_0^x \nu(t)\,dt \tag{9}$$

С учетом (9) из (8) при $y = 0$ получим

$$\tau(x) = \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x) + \beta(x)} \int_0^x \nu(t)\,dt + 2\frac{\delta(x) - \beta(x)[u(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) - \tau(0)]}{\alpha(x) + \beta(x)} - \tau(0) \tag{10}$$

где $u(x,0) = \tau(x)$. Из (4) и (5) следует, что

$$u(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=\frac{\delta(1)}{\alpha(1)}-\frac{\beta_1}{\alpha(1)} \tag{11}$$

$$\tau(0)=\frac{\delta(0)-\beta(0)[\delta(1)-\beta_1]}{\alpha(0)} \tag{12}$$

поэтому задача 1 корректна и ее решение выписывается в явном виде по формулам (8) и (9).
Можно отметить, что в случае замены (5) условием

$$\beta(0)\beta(1) + \alpha(0)[2\beta(1) + \alpha(1)] \neq 0 \tag{13}$$

задача поставлена корректно.

Для доказательства однозначности $\psi(1)$ и $\psi(0)$ составляем систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha(1)u(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})+\beta(1)u(1,0)=\delta(1) \\ \alpha(0)u(0,0)+\beta(0)u(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=\delta(0) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \alpha(1)\psi(1)+2\beta(1)\psi(1)-\beta(1)\psi(0)=\int_0^1 v(t)dt+\delta(1) \\ \alpha(0)\psi(0)+\beta(0)\psi(1)=\delta(0) \end{cases} \tag{14}$$

Отсюда мы видим, что для однозначности $\psi(1)$ и $\psi(0)$ необходимо и достаточно выполнение условия (3).

2. Об обобщении задачи 3 для уравнения Лаврентьева – Бицадзе.

Задача 2. Найти регулярное в области $\Omega$ решение $u(z)$ уравнения (2), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(z)=\varphi(z),\ \forall z\in\sigma \tag{15}$$

и $$\alpha(x)u(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})+\beta(x)u(\frac{x+1}{2},\frac{x-1}{2})=\delta(x),\quad \forall x\in \bar{J} \tag{16}$$

где $\varphi(x)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\delta(x)$ – заданные непрерывные функции, причем,

$$\alpha(x),\beta(x),\delta(x)\in H(\bar{J})\cap C^2(J),\alpha(x),\beta(x),\delta(x)\in C^1(\bar{J})\cap C^3(J)$$

Заданные функции $\varphi(x)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\delta(x)$ связаны условием согласованности

$$\alpha(0)\varphi(0)+\frac{\beta(0)}{\alpha(0)}[\delta(1)-\beta(1)\varphi(1)]=\delta(0),\ \text{где } \alpha(0)\neq 0 \tag{17}$$

и $$\alpha(x)+\beta(x)\neq 0,\quad \forall x\in \bar{J} \tag{18}$$

Существование и единственность решения задачи 2 для уравнения (1) доказаны А.М.Нахушевым в случае, когда $\alpha(x)=1$.

Известный принцип экстремума А.В.Бицадзе [2] применительно к задаче 2 формулируется следующим образом.

Пусть

$$\beta'(x)\alpha(x)-\alpha'(x)\beta(x)\geq 0,\ \forall x\in J_1=\{x|x\in J,\ \beta(x)\neq\alpha(x)\} \tag{19}$$

$$\delta(x)=0,\ \varphi(1)=0 \tag{20}$$

тогда положительный максимум и отрицательный минимум решения $u(z)$ задачи 2 в замкнутой области $\bar{\Omega}$ достигается лишь на $\sigma$.

Действительно, из разрешимости задачи 1 непосредственно вытекает, что любое решение $u(z)$ задачи 2, если оно существует, удовлетворяет соотношению (10), которое в силу(7) и (20) имеет вид

 

$$\tau(x)=\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)+\beta(x)}\int_0^x v(t)dt$$

или

$$\tau(x)\frac{2\beta'(x)\alpha(x)-2\alpha'(x)\beta(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}+\frac{\alpha(x)+\beta(x}{\alpha(x)-\beta(x}\tau'(x)=v(x),\ \forall x\in J_1 \tag{21}$$

где $\tau(x) = u(x,-0)$, $u_y(x,-0) = v(x)$.

Предположим, что $\max\limits_{\Omega_1} u(z)=u(\zeta)>0.$

Очевидно $\zeta\notin\Omega_1$. Пусть $\zeta\in J$. Тогда из (21) при $\delta(x)=0$, $\varphi(1)=0$ и при выполнении условия (19) имеем, что $v(\xi)>0$, где $\zeta=\mathrm{Re}\zeta$. Последнее противоречит принципу Зарембо-Жиро [3], следовательно, $\zeta\in\sigma$. Таким образом задача 2 имеет не более одного решения, если выполнены условия (19) и (20).

Переходя к доказательству существования решения задачи 2 будем предполагать, что

1) кривая $\sigma$ совпадает с нормальным контуром $\sigma_0$:$|z-1/2|=1/2$;
2) функция $\varphi(x)$ представима

$$\varphi(z)=x(1-x)\varphi_0(x),\ \varphi_0(x)\in C(\bar{J}) \tag{22}$$

Как и в случае задачи Трикоми, интегро-дифференциальное соотношение между $\tau(x)$ и $v(x)$, привнесенное на J из эллиптической части области $\Omega$, имеет вид

$$\tau(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2+x}\right)v(t)dt=\Phi^1(x), \tag{23}$$

где $\Phi(x)=\dfrac{x(1-x)}{\pi}\displaystyle\int_0^1\varphi_0(t)[t(1-t)]^{1/2}[x^2-(2x-1)t]^{-1}dt$ и в силу (22) функция $\Phi(x)\in C^1(J)\cap C^\infty(J)$ при $x\to 0,1$ обращается в нуль порядка не ниже единицы. Принимая во внимание (19),(21),(22),(23) нетрудно увидеть, теперь, что задача 2 эквивалентна (в смысле разрешимости) следующему сингулярному интегральному уравнению:

$$[\alpha(x)-\beta(x)]v(x)+\frac{\alpha(x)+\beta(x)}{\pi}\int_0^1\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2+x}\right)v(t)dt+ \\ +\frac{2[\alpha'(x)\beta(x)-\beta'(x)\alpha(x)]}{\alpha(x)+\beta(x)}\int_0^x v(t)dt=f(x) \tag{24}$$

где $f(x)\in C^1(\bar{J})\cap C^\infty(J)$–известная функция.

Уравнение (24) известным методом регуляризации Карлемана-Векуа [3] можно свести к эквивалентному уравнению Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которого следует из единственности решения задачи 2.

**Литература**


1. *Нахушев А.М.* Дифференциальные уравнения.– 1969.– № 1.
2. *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа.– М.: Изд-во АН СССР.– 1959.
3. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения.– М.: Физматгиз.– 1962.


## Generalization of the third problem for Lavrentev-Bizadse wave equation

**A.I. Kuev**

The some edge problems for Lavrentev-Bizadse wave equation are solved.

 