СПЕКТРАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ

А. Н. Чернышев

Армавирский государственный педагогический институт, г. Армавир

Говорят, что замкнутое инвариантное относительно некоторого оператора подпространство W допускает спектральный синтез, если оно совпадает с замыканием линейной оболочки корневых элементов оператора, содержащихся в W. Задача спектрального синтеза для конкретного оператора состоит в отыскании условий, при которых замкнутые инвариантные подпространства допускают спектральный синтез. Один из современных путей решения задач спектрального синтеза связан с переходом к двойственным задачам. Эти переходы, как правило, осуществляются в рамках специальных условий и вызывают значительные трудности. В настоящей работе осуществлен двойственный переход от задачи спектрального синтеза для бесконечного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами к соответствующей задаче локального описания целых функций экспоненциального типа.

§1. Постановка задачи спектрального синтеза

Пусть Ω - выпуклая область в $\mathbf{C}$, содержащая начало; $H = H(\Omega)$ - пространство функций, аналитических в Ω, с топологией равномерной сходимости на компактах; $H^* = H^*(\Omega)$ - сильное сопряженное к H; S_0 - фиксированный функционал из H^*; $\pi(z) =< S_0, \exp\{z\xi\} >$ - его преобразование Лапласа. Считаем, что целая функция $\pi(z)$ имеет минимальный тип при порядке $\rho = 1$ и $\pi(\mathrm{C}) = \mathrm{C}$. Обозначим $\pi(D)f$ - оператор свертки

$$\pi(D)f =< S_0, f(\xi + z) > .$$

Используя интегральное представление функционала S_0, имеем:

$$\pi(D)f = \frac{1}{2\pi i}\int_C \gamma_0(\xi) f(\xi + z)d\xi, \tag{1}$$

где $\gamma_0(\xi)$ - преобразование Бореля функционала S_0, а контур C охватывает все особенности $\gamma_0(\xi)$. Т.к. $\pi(z)$ - целая функция минимального типа, то единственная особенность преобразования Бореля $\gamma_0(\xi)$ есть точка $\xi = 0$. Таким образом, в качестве контура C может быть выбран любой сколь угодно "малый" контур, охватывающий начало. Из теоремы об интеграле, зависящем от параметра, следует, что интеграл (1) представляет функцию, аналитическую в H. Таким образом, $\pi(D)f : H \to H$.

Пусть $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{k!}z^k$ - разложение $\pi(z)$ в ряд, тогда $\gamma_0(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{\xi^{k+1}}$. При этом, из представления оператора $\pi(D)f$ в интегральной форме (1), имеем:

$$\pi(D)f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \gamma(\xi) f(\xi + z)d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_C \sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{\xi^{k+1}} f(\xi + z)d\xi =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi + z)}{\xi^{k+1}}d\xi = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{k!}\cdot\frac{k!}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{(t-z)^{k+1}}dt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{k!}\cdot D^{(k)} f(z) \quad (2)$$

Из представления (2) оператора $\pi(D)f$ получаем, что он является линейным дифференциальным оператором с постоянными коэффициентами бесконечного порядка.

Подпространство $W \subseteq H$ называется *инвариантным,* если выполняется импликация $f \in H \Rightarrow \pi(D)f \in H$. *Собственным значением* оператора $\pi(D)f$ называется число $\lambda \in \mathbf{C}$, удовлетворяющее уравнению $(\pi(D)-\lambda)f = 0$ при какой-либо ненулевой функции $f \in H$. *Алгебраическим спектром* оператора $\pi(D)f$ называется совокупность всех собственных значений оператора $\pi(D)f$. *Корневым подпространством* оператора $\pi(D)f$, соответствующим собственному значению $\lambda \in \mathbf{C}$, называется подпространство H, состоящее из элементов, каждый из которых при некотором $k \in \mathbf{Z}_+$ удовлетворяет уравнению $(\pi(D)-\lambda)^k f = 0$.

Пусть $\lambda \in \mathbf{C}$, $\omega \in \widetilde{\lambda}$, где $\widetilde{\lambda} = \pi^{-1}(\lambda)$. Если ω - простой корень функции $\pi(z)-\lambda$, то экспоненциальный одночлен вида $\exp\{\omega z\}$ является корневым элементом оператора $\pi(D)f$, соответствующим собственному значению λ. Действительно,

$$(\pi(D)-\lambda)\exp\{\omega z\} = < S_0, e^{\omega\xi} e^{\omega z} > -\lambda \cdot e^{\omega z} = e^{\omega z}(\pi(\omega)-\lambda) = 0.$$

Таким образом, алгебраический спектр оператора совпадает с $\mathbf{C}$.

Если ω - корень функции $\pi(z)-\lambda$ кратности n, то экспоненциальные одночлены вида $z^i \exp\{\omega z\}$, $i = 0,\dots,n-1$ является корневыми элементами оператора $\pi(D)f$. Действительно,

$$z^i \exp\{\omega z\} = \frac{\partial^i}{\partial h^i}(\exp\{hz\})\bigg|_{h=\omega}.$$

Значит,

$$(\pi(D)-\lambda)\frac{\partial^i}{\partial h^i}(\exp\{hz\})\bigg|_{h=\omega} = \frac{\partial^i}{\partial h^i}[(\pi(D)-\lambda)\exp\{hz\}]\bigg|_{h=\omega} =$$

$$= \frac{\partial^i}{\partial h^i}[(\pi(h)-\lambda)\exp\{hz\}]\bigg|_{h=\omega} = 0,\ i = 0,\dots,n-1,$$

так как

$$(\pi(z)-\lambda)\big|_{z=\omega} = 0,\ (\pi(z)-\lambda)'\big|_{z=\omega} = 0,\dots,(\pi(z)-\lambda)^{(n-1)}\big|_{z=\omega} = 0.$$

Говорят, что замкнутое инвариантное подпространство W *допускает спектральный синтез,* если оно совпадает с замыканием в H линейной оболочки корневых элементов оператора $\pi(D)f$, содержащихся в W.

Задача спектрального синтеза для оператора $\pi(D)f$: найти условия, при которых замкнутое инвариантное подпространство $W \subseteq H$ допускает спектральный синтез.

Теорема 1. Корневое подпространство $E(\lambda)$ оператора $\pi(D)$, соответствующее собственному значению $\lambda \in \mathrm{C}$, совпадает с замыканием в H подпространства, натянутого на множество всех экспоненциальных одночленов вида $z^n \exp(\omega z)$, $\omega \in \widetilde{\lambda} = \pi^{-1}(\lambda)$.

Это утверждение непосредственно следует из [1, предложения 6.1].

§2. Переход к индуктивному описанию

Пусть $\lambda \in \mathbf{C}$, $E(\lambda)$ - корневое подпространство H, соответствующее собственному значению λ, W - замкнутое инвариантное подпространство в H.

Задача индуктивного описания: *найти условия, при которых замкнутое инвариантное подпространство* W *совпадает с замыканием в* H *подпространства, натянутого на множество*

$$\bigcup_{\lambda\in\mathbf{C}}(W\cap E(\lambda))=W\cap\left(\bigcup_{\lambda\in\mathbf{C}}E(\lambda)\right).$$

Пусть $\mathbf{Z}_+$ - множество неотрицательных целых чисел и $\lambda\in\mathbf{C}$. Обозначим $Z_\lambda=\mathbf{Z}_+\times\tilde{\lambda}$, $\tilde{\lambda}=\pi^{-1}(\lambda)$. Множество Z_λ наделяем дискретной топологией.

Обозначим M_λ множество всех комплексных функций на Z_λ с компактными носителями. Пусть $\{d_{\lambda,k}\}_{k=1}^{\infty}$ - последовательность компактов в Z_λ со свойствами:

$$d_{\lambda,1}\subset d_{\lambda,2}\subset\ldots\subset Z_\lambda,\quad d_{\lambda,1}\bigcup d_{\lambda,2}\bigcup\ldots=Z_\lambda;$$

$\mathrm{M}_{\lambda,k}$ - множество всех комплексных функций на Z_λ, носители которых лежат в $d_{\lambda,k}$. Наделяем $\mathrm{M}_{\lambda,k}$ топологией, порождаемой обычной sup - нормой, а M_λ - топологией индуктивного предела пространств $\mathrm{M}_{\lambda,k}$ относительно вполне непрерывных вложений $\mathrm{M}_{\lambda,k}\to\mathrm{M}_{\lambda,k+1}$.

Как строгий индуктивный предел банаховых пространств, M_λ полное [11, Гл. VII, предложение 3], бочечное [11, Гл. V, предложение 6] и борнологическое [11, Гл. V, предложение 8, следствие]. Кроме того, каждое ограниченное множество в M_λ предкомпактное [11, приложение 2, предложения 1, 2], следовательно, M_λ - монтелевское пространство и, значит, рефлексивное.

Для выбранного $\lambda\in\mathbf{C}$ рассмотрим отображение $m_\lambda:\mathrm{M}_\lambda\to H$, которое каждому элементу $a=a(n,\omega)\in\mathrm{M}_\lambda$ ставит в соответствие корневой элемент оператора $\pi(D)$:

$$\sum\nolimits_{(n,\omega)\in Z_\lambda}a(n,\omega)\frac{1}{n!}z^n\exp\{\omega z\}.$$

Это отображение взаимно однозначно и непрерывно.

Варьируя $\lambda\in\mathbf{C}$, получаем семейство отображений $m_\lambda:\mathrm{M}_\lambda\to H,\ \ \lambda\in\mathrm{C}$. Непрерывность этих отображений позволяет говорить об индуктивном описании замкнутых инвариантных подпространств в H. При этом, по определению, замкнутое инвариантное подпространство $W\subseteq H$ *допускает индуктивное описание*, если оно совпадает с замыканием в H подпространства, натянутого на объединение

$$\bigcup\nolimits_{\lambda\in\mathrm{C}}m_\lambda(W_\lambda),$$

где $W_\lambda=m_\lambda^{-1}(W)$ - индуктивное подпространство W в M_λ.

Предложение 1: *Замкнутое подпространство $W\subseteq H$ допускает спектральный синтез тогда и только тогда, когда оно допускает индуктивное описание.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Из теоремы 1. следует, что замыкание в H полного образа $m_\lambda(W_\lambda)$ отображения m_λ совпадает с корневым подпространством $E(\lambda)$ оператора $\pi(D)$, соответствующим вектору собственных значений $\lambda\in\mathrm{C}$. Т.к. отображение m_λ взаимно однозначно, то

$$m_\lambda(W_\lambda)=m_\lambda\circ m_\lambda^{-1}(W)=W\cap E(\lambda).$$

Согласно определению, замкнутое инвариантное подпространство W допускает индуктивное описание, если оно совпадает с замыканием в H подпространства, натянутого на множество

$$\bigcup\nolimits_{\lambda\in\mathrm{C}}m_\lambda(W_\lambda)=\bigcup\nolimits_{\lambda\in\mathrm{C}}(W\bigcap E(\lambda))=W\bigcap(\bigcup\nolimits_{\lambda\in\mathrm{C}}E(\lambda)),$$

то есть совпадает с замыканием в H линейной оболочки корневых элементов оператора $\pi(D)$, содержащихся в W. Предложение доказано.

Предложение 1 сводит задачу спектрального синтеза к вопросу допустимости замкнутым инвариантным подпространством в H индуктивного описания.

§3. Постановка задачи локального описания

1. $\mathrm{C}[\pi]$-модуль P. Пусть H^* - сильное сопряженное к пространству $\mathrm{H}=\mathrm{O}(\Omega)$. Обозначим T преобразование, которое каждому функционалу $S\in \mathrm{H}^*$ ставит в соответствие целую функцию экспоненциального роста $\varphi(z)=< S,\exp\{z\xi\}>$. Пусть P - полный образ отображения T. Т.к. Ω является областью Рунге в C, то отображение $T:\mathrm{H}^*\to \mathrm{P}$ взаимно однозначно [9, стр. 77]; оно индуцирует в P отделимую локально выпуклую топологию. При этом отображение $T:\mathrm{H}^*\to \mathrm{P}$ - топологический изоморфизм, значит, P - отделимое рефлексивное локально выпуклое пространство. Кроме того, P выдерживает умножение на целые функции минимального типа $\pi(z)$. Действительно, если $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{k!}z^k$ - разложение $\pi(z)$ в ряд Тейлора, то

$$\pi(D)_\xi \exp\{z\xi\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{k!}D_\xi^{(k)}\exp\{z\xi\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{k!}z^k\exp\{z\xi\}=\exp\{z\xi\}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{k!}z^k=$$
$$=\pi(z)\exp\{z\xi\}.$$

Тогда

$$\pi(z)\cdot\varphi(z)=< S,\pi(z)\cdot\exp\{z\xi\}>=< S,\pi(D)_\xi\exp\{z\xi\}>=<\pi^*(D)S,\exp\{z\xi\}>,$$

где $\pi^*(D)$ оператор, сопряженный к оператору $\pi(D)$:

$$(< S,\pi(D)f>=<\pi^*(D)S,f>).$$

Т.к. $\pi^*(D)S\in \mathrm{H}^*$, то $\pi(z)\cdot\varphi(z)\in \mathrm{P}$. Кроме того, операция умножения на целые функции минимального типа в P непрерывна в топологии P. Рассматриваем P как топологический модуль над кольцом $\mathrm{C}[\pi]$ многочленов от $\pi(z)$.

2. Локальное описание замкнутых подмодулей в P. Множество $U\subseteq \mathrm{C}$ будем называть π-*симметричным*, если найдется $U'\subseteq \mathrm{C}$ такое, что $U=\pi^{-1}(U')$. Функция φ, определенная на π-симметричном множестве $U\subseteq \mathrm{C}$ π-*симметрична*, если найдется локально голоморфная на $\pi(U)$ функция Φ такая, что φ представляется в виде $\Phi\circ\pi$.

Открытые π–симметричные множества в C образуют топологию τ_π. Пусть $U\in\tau_\pi$; $O(U)$ - кольцо голоморфных на U функций; $O_\pi(U)$ - множество всех π–симметричных на U функций. Очевидно, $O_\pi(U)$ - подкольцо $O(U)$. Рассматриваем $O(U)$ как модуль над кольцом $O_\pi(U)$.

Совокупность $\{O_\pi(U)\}$, $U\in\tau_\pi$, вместе с гомоморфизмами сужения $\rho_{U,U'}:O_\pi(U')\to O_\pi(U), U\subseteq U'$, образует предпучок колец над (C,τ_π). Аналогично, совокупность $\{O(U)\}$, $U\in\tau_\pi$, вместе с гомоморфизмами сужения $\sigma_{U,U'}:O_\pi(U')\to O_\pi(U), U\subseteq U'$, образует предпучок абелевых групп над (C,τ_π) [12, Гл. IV, А]. Легко убедиться, что отображение $\sigma_{U,U'}$, $U\subseteq U'$, является гомоморфизмом $O_\pi(U')$–модуля $O(U')$ в $O_\pi(U)$–модуль $O(U)$, следовательно, предпучок абелевых групп $\{O(U)\}$, $U\in\tau_\pi$, является предпучком модулей над предпучком колец $\{O_\pi(U)\}$, $U\in\tau_\pi$.

Выберем $\lambda \in \mathbf{C}$. Пусть $\tilde{\lambda} = \pi^{-1}(\lambda)$. Слой предпучка $\{O(U)\}$, $U \in \tau_\pi$ (- индуктивный предел групп $O(U)$, $\tilde{\lambda} \subset U \in \tau_\pi$, относительно гомоморфизмов $\sigma_{U,U'}$, $U \subseteq U'$) обозначим символом $O(\tilde{\lambda})$. Аналогично, слой предпучка $\{O_\pi(U)\}$, $U \in \tau_\pi$ (- индуктивный предел колец $O_\pi(U)$, $\tilde{\lambda} \subset U \in \tau_\pi$, относительно гомоморфизмов $\rho_{U,U'}$, $U \subseteq U'$) обозначим символом $O_\pi(\tilde{\lambda})$. Слой $O_\pi(\tilde{\lambda})$ обладает структурой кольца, а слой $O(\tilde{\lambda})$ - структурой модуля над этим кольцом (и векторного пространства над полем C). Элементы $O(\tilde{\lambda})$ называются ростками функций, голоморфных в окрестностях $\tilde{\lambda}$, а элементы $O_\pi(\tilde{\lambda})$ - ростками π–симметричных функций, голоморфных в π–симметричных окрестностях $\tilde{\lambda}$.

Пусть I - замкнутый подмодуль в P. Обозначим $I(\tilde{\lambda})$ минимальный подмодуль $O_\pi(\tilde{\lambda})$–модуля $O(\tilde{\lambda})$, включающий I. Ясно, что $I(\tilde{\lambda})$ состоит из всевозможных конечных сумм $\sum c_i \varphi_i$, где $c_i \in O_\pi(\tilde{\lambda})$, $\varphi_i \in I$. Подмодуль $I(\tilde{\lambda})$ называется *локальным подмодулем I, ассоциированным с π–слоем* $\tilde{\lambda}$. Подмодуль *I допускает локальное описание*, если справедлива импликация:

$$\varphi \in \mathrm{P},\ \ \varphi \in I(\tilde{\lambda})\ \ \forall \lambda \in \Lambda\ \Rightarrow \varphi \in I\,. \tag{3}$$

Задача локального описания: *найти условия, при которых замкнутый подмодуль $I \subseteq \mathrm{P}$ допускает локальное описание.*

Отметим, что импликация (3) была введена впервые И.Ф. Красичковым-Терновским в [13]. Замкнутые подмодули, удовлетворяющие этой импликации названы им *обильными*. Таким образом, обильные подмодули в P и только они допускают локальное описание.

§4 Переход к проективному описанию

1. Пространство N_λ. Рассмотрим пространство N_λ, сильное сопряженное к M_λ. Пусть $\{d_{\lambda,k}\}_{k=1}^{\infty}$ - последовательность компактов в Z_λ со свойствами

$$d_{\lambda,1} \subset d_{\lambda,2} \subset \ldots \subset \mathrm{Z}_\lambda,\ d_{\lambda,1} \bigcup d_{\lambda,2} \bigcup \ldots = \mathrm{Z}_\lambda.$$

Пусть $\mathrm{N}_{\lambda,\mathrm{k}}$ - пространство всех комплексных функций на $d_{\lambda,k}$. Если наделить $\mathrm{N}_{\lambda,\mathrm{k}}$ топологией, порождаемой sup-нормой, то $\mathrm{N}_{\lambda,\mathrm{k}}$ можно отождествить с сильным сопряженным к $\mathrm{M}_{\lambda,\mathrm{k}}$ [10, теорема 4.2.1]. Значит пространство N_λ может быть отождествлено с проективным пределом пространств $\mathrm{N}_{\lambda,\mathrm{k}}$ относительно сужений $\mathrm{N}_{\lambda,\mathrm{k+1}} \to \mathrm{N}_{\lambda,\mathrm{k}}$ [11, Гл. V, предложение 15]. По запасу элементов пространство N_λ совпадает с пространством всех комплексных функций на Z_λ. Топология N_λ совпадает с топологией равномерной сходимости на компактах и порождается счетным набором полунорм

$$a \to |a(\omega, j)|,\ (\omega, j) \in \mathrm{Z}_\lambda.$$

Билинейная форма, приводящая пространства M_λ и N_λ в двойственность, имеет вид

$$< a,b > = \sum\nolimits_{(\omega, j) \in \mathrm{Z}_\lambda} a(\omega, j) b(\omega, j),\ \ a \in \mathrm{N}_\lambda,\ b \in \mathrm{M}_\lambda.$$

2. Проективное описание замкнутых подмодулей в P. Пусть $\lambda \in \mathrm{C}$. Рассмотрим отображение $n_\lambda : \mathrm{P} \to (\mathrm{M}_\lambda)^* = \mathrm{N}_\lambda$, которое каждому элементу $\varphi \in \mathrm{P}$ ставит в соответствие элемент

$$n_\lambda : \varphi \to \frac{1}{n!} D^n \varphi(\omega),\ (n,\omega) \in \mathrm{Z}_\lambda .$$

Т.к. отображение вложения $\mathrm{P} \subseteq O(\mathrm{C})$ непрерывно и взаимно однозначно, то отображение n_λ непрерывно и взаимно однозначно.

Введем в $O(\tilde{\lambda})$ отделимую локально выпуклую топологию, порожденную счетным набором полунорм

$$u \to \frac{1}{n!}\left| D^n u(\omega) \right|,$$

каждая из которых определяется выбором точки (u,ω) из декартова произведения $\mathrm{Z}_\lambda = \mathrm{Z}_+^* \times \tilde{\lambda}$. Произведение элементов $O(\tilde{\lambda})$ на элементы кольца $O_\pi(\tilde{\lambda})$ непрерывно в этой топологии , следовательно $O_\pi(\tilde{\lambda})$-модуль $O(\tilde{\lambda})$ является топологическим.

Пусть I - замкнутый подмодуль в $\mathrm{C}[\pi]$-модуля P; $I(\tilde{\lambda})$ - локальный подмодуль I, ассоциированный с π-слоем $\tilde{\lambda}$; $\overline{I(\tilde{\lambda})}$ - его замыкание в топологии $O(\tilde{\lambda})$.

Лемма 1. *Множество* $\overline{I(\tilde{\lambda})}$ *совпадает с замыканием* $\bar{I}$ *множества* I *в топологии* $O(\tilde{\lambda})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Т.к. $I \subseteq I(\tilde{\lambda})$, то $\bar{I} \subseteq \overline{I(\tilde{\lambda})}$. Для доказательства обратного включения достаточно установить, что $I(\tilde{\lambda}) \subseteq \bar{I}$ поскольку в этом случае в силу замкнутости $\bar{I}$ получим $\overline{I(\tilde{\lambda})} \subseteq \bar{I}$. Пусть $u \in I(\tilde{\lambda})$, т.е. u имеет вид $u = \sum_{i<\infty} c_i u_i$, где $u_i \in I$, $c_i \in O_\pi(\tilde{\lambda}) \subseteq O(\tilde{\lambda})$. Ростки c_i можно отождествить с функциями вида $c_i = C_i \circ \pi$, где C_i - функции, голоморфные в некоторой окрестности точки $\lambda \in \mathrm{C}$. Обозначим c_{ik} композицию $C_{ik} \circ \pi$, где $C_{ik} = \sum_{n \le k} a_{in} (z-\lambda)^n$ - частичная сумма разложения C_i в ряд. Легко проверить, что последовательность $u_k = \sum_{i<k} c_{ik} u_i,\ k = 1,2,\ldots$ сходится к u в топологии $O(\tilde{\lambda})$. Т.к. $c_{ik} \in \mathrm{C}[\pi]$ и I - подмодуль $\mathrm{C}[\pi]$-модуля P, то $u_k \in I$, а т.к. $u_k \to u$ в топологии $O(\tilde{\lambda})$, то $u \in \bar{I}$. Т.е. $I(\tilde{\lambda}) \subseteq \bar{I}$. Лемма доказана ¦

Говорят, что замкнутый подмодуль $I \subseteq \mathrm{P}$ *допускает проективное описание*, если

$$I = \bigcap_{\lambda \in \mathrm{C}} n_\lambda^{-1}(I_\lambda)$$

где $I_\lambda = \overline{n_\lambda(I)}$ - замыкание $n_\lambda(I)$ в топологии N_λ.

Предложение 2. *Замкнутый подмодуль* $I \subseteq \mathrm{P}$ *допускает проективное описание тогда и только тогда, когда справедлива импликация:*

$$\varphi \in \mathrm{P}, \varphi \in \overline{\mathrm{I}(\tilde{\lambda})}\ \ \forall \lambda \in \mathrm{C} \Rightarrow \varphi \in \mathrm{I} \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $\mu_\lambda : \mathrm{P} \to \mathrm{O}(\tilde{\lambda})$ - отображение вложения; $\tilde{n}_\lambda : O(\tilde{\lambda}) \to \mathrm{N}_\lambda$ - естественное продолжение отображения n_λ. Все отображения $n_\lambda,\ \tilde{n}_\lambda,\ \mu_\lambda$ являются взаимно однозначными и, кроме того, $\tilde{n}_\lambda$ есть топологический изоморфизм $O(\tilde{\lambda})$ на $\mathrm{N}'_\lambda = \tilde{n}_\lambda(O(\tilde{\lambda}))$, где N'_λ - наделяется топологией, индуцированной из N_λ. Заметим, что множество

$\{\varphi \in \mathrm{P} : \varphi \in \overline{I(\tilde{\lambda})}\}$ представляется в виде $\mu_\lambda^{-1}(\overline{I(\tilde{\lambda})})$. Поэтому импликация (4) равносильна соотношению

$$\bigcap_{\lambda \in \mathrm{C}} \mu_\lambda^{-1}(\overline{I(\tilde{\lambda})}) = I$$

Далее, из очевидного соотношения $n_\lambda = \tilde{n}_\lambda \circ \mu_\lambda$, следует

$$\mu_\lambda = \tilde{n}_\lambda^{-1} \circ n_\lambda,\ \mu_\lambda^{-1} = n_\lambda^{-1} \circ \tilde{n}_\lambda$$

Отсюда, используя Лемму 1 и тот факт, что $\tilde{n}_\lambda$ есть топологический изоморфизм $O(\tilde{\lambda})$ на N'_λ, имеем:

$$\mu_\lambda^{-1}(\overline{I(\tilde{\lambda})}) = n_\lambda^{-1} \circ \tilde{n}_\lambda(\overline{I(\tilde{\lambda})}) = n_\lambda^{-1} \circ \tilde{n}_\lambda(\bar{I}) = n_\lambda^{-1}(\overline{\tilde{n}_\lambda(I)}) =$$
$$n_\lambda^{-1}(\overline{\tilde{n}_\lambda \circ \mu_\lambda(I)}) = n_\lambda^{-1}(\overline{n_\lambda(I)}) = n_\lambda^{-1}(I_\lambda).$$

Предложение доказано.

3. Предварительные упрощения. Пусть $\lambda \in \mathrm{C}$, $\tilde{\lambda} = \pi^{-1}(\lambda)$. Пусть $\{\tilde{\lambda}_k\}, k \in \mathrm{A}$ (A - индексное множество, для простоты дальнейших рассуждений можно положить $\mathrm{A} = \mathrm{N}$, т.к. число конечных подслоев бесконечного слоя $\tilde{\lambda}$ счетное) – всевозможные конечные подмножества точек слоя $\tilde{\lambda} = \pi^{-1}(\lambda)$ для фиксированного $\lambda \in \mathrm{C}$ такие, что $\bigcup_{k \in \mathrm{A}} \tilde{\lambda}_k = \tilde{\lambda}$. С каждым $\{\tilde{\lambda}_k\}, k \in \mathrm{N}$ свяжем кольцо $O(\tilde{\lambda}_k)$ ростков функций, голоморфных в окрестности $\tilde{\lambda}_k$. $O_\pi(\tilde{\lambda}_k)$ - ростки π-симметричных функций, голоморфных в π-симметричных окрестностях $\tilde{\lambda}_k$. $O_\pi(\tilde{\lambda}_k)$ - подкольцо $O(\tilde{\lambda}_k)$. Т.о., $O(\tilde{\lambda}_k)$ можно рассматривать как модуль над кольцом $O_\pi(\tilde{\lambda}_k)$.

Имеют место очевидное соотношение: в окрестности подслоя $\tilde{\lambda}_k,\ k \in A$ $O_\pi(\tilde{\lambda}) = O_\pi(\tilde{\lambda}_k)$. Кроме того, $\mathrm{P} \subseteq O(\tilde{\lambda}) \subseteq O(\tilde{\lambda}_k)$. Обозначим $v_k,\ k \in \mathrm{N}$ - отображения вложения $O(\tilde{\lambda})$ в $O(\tilde{\lambda}_k)$. Это отображения взаимно однозначны и непрерывны. Отделимое локально выпуклое пространство $O(\tilde{\lambda})$ можно трактовать как проективный предел пространств $O(\tilde{\lambda}_k)$, $k \in \mathrm{N}$ относительно непрерывных вложений v_k. Пусть I - замкнутый подмодуль $\mathrm{C}[\pi]$-модуля P; $I(\tilde{\lambda})$ - локальный подмодуль I, ассоциированный с π-слоем $\tilde{\lambda}$; $I(\tilde{\lambda}_k)$ - локальный подмодуль I, ассоциированный с $\tilde{\lambda}_k \subseteq \tilde{\lambda} = \pi^{-1}(\lambda)$; при этом $I(\tilde{\lambda}_k) = v_k(I(\tilde{\lambda}))$. По определению

$$I(\tilde{\lambda}) = \{\sum_{i<\infty} c_i \varphi_i : c_i \in O_\pi(\tilde{\lambda}),\ \varphi_i \in I\}$$

$$I(\tilde{\lambda}_k) = \{\sum_{i<\infty} c_i \varphi_i : c_i \in O_\pi(\tilde{\lambda}_k),\ \varphi_i \in I\}$$

Т.к. $O_\pi(\tilde{\lambda}) = O_\pi(\tilde{\lambda}_k)$ в окрестности конечного подслоя $\tilde{\lambda}_k \subseteq \tilde{\lambda} = \pi^{-1}(\lambda)$, то $v_k(I(\tilde{\lambda})) = I(\tilde{\lambda}_k)$. При этом, очевидно $I(\tilde{\lambda}) = \bigcap_{k\in \mathrm{N}} v_k^{-1}(I(\tilde{\lambda}_k))$

4. От проективного описания к локальному описанию. Для доказательства эквивалентности задач проективного и локального описания, учитывая предложение 2, достаточно доказать замкнутость локальных подмодулей $I(\tilde{\lambda})$. Учитывая результаты предыдущего пункта, для замкнутости $I(\tilde{\lambda}) = \bigcap_{k\in \mathrm{N}} v_k^{-1}(I(\tilde{\lambda}_k))$, учитывая непрерывность вложений v_k, $k \in \mathrm{N}$ достаточно доказать замкнутость каждого из локальных подмодулей $I(\tilde{\lambda}_k) = v_k(I(\tilde{\lambda}))$ ассоциированных с *конечным* подслоем $\tilde{\lambda}_k$.

Выберем в кольце $\mathrm{C}[\pi]$ многочлен r от целых функций минимального типа. Зафиксируем $\lambda \in \mathrm{C}$ и рассмотрим π-слой $\tilde{\lambda} = \pi^{-1}(\lambda)$. В π-слое $\tilde{\lambda}$ выберем произвольный конечный подслой $\tilde{\lambda}_k$. Так как $r \in \mathrm{C}[\pi]$, то на элементах из подслоя $\tilde{\lambda}_k$ отображение C “на” C, осуществляемое целой функцией r, принимает одинаковое значение ξ. Значит подслой $\tilde{\lambda}_k$ представляет собой компактное подмножество r-слоя $r^{-1}(\xi) \subset \mathrm{C}$. По предложению 2 из [12, Гл. V, C] существует окрестность $g \subseteq U$ слоя $\tilde{\lambda}_k$ такая, что сужение r_g отображения r на множество g является собственным отображением “на” некоторое открытое множество $\Delta \subset \mathrm{C}$. Следовательно, тройка (g, r_g, Δ) - аналитическое накрытие [12, Гл. , B, теорема 21]. Число точек в простых слоях накрытия (g, r_g, Δ) будем обозначать через p.

В этих условиях оказывается справедлива:

Лемма 2. *Любой элемент* $f \in O(g)$ *единственным образом представляется в виде* $f = \sum_{j=1}^{p} z^j f_j \circ \pi_g$, $f_j \in O(\Delta)$.

Доказательство этой леммы приведено в [15] (§3 пункт 4 лемма 2).

Совокупность $\{U\}$ всех открытых r_g-симметричных множеств в g образует топологию τ_r, а совокупность $\{O_r(U)\}$ колец r_g-симметричных функций, вместе с гомоморфизмами сужения, образует предпучок колец над (g, τ_r). Слой этого предпучка, ассоциированный с r_g-слоем $\tilde{\lambda}_k$, обозначим $O_r(\tilde{\lambda}_k)$. Совокупность $\{g'\}$ r_g-симметричных областей, $\tilde{\lambda}_k \subset g' \subseteq g$, образует фундаментальную систему окрестностей слоя $\tilde{\lambda}_k$ в топологии τ_r. Это позволяет сформулировать локальный вариант леммы 2.

Лемма 3. *Любой элемент* $u \in O(\tilde{\lambda}_k)$ *единственным образом представляется в виде*

$$u = \sum_{j=1}^{p} z^j u_j\ ,\ u_j \in O_r(\tilde{\lambda}_k) \qquad (5)$$

Пусть $O^p(\xi)$ - декартово произведение p копий $O(\xi)$. Топологизируем $O^p(\xi)$ с помощью счетного набора полунорм

$$p(\alpha, j): f = (f_j) \to \frac{1}{\alpha!}\left|D^\alpha f_j(\xi)\right|,$$

каждая из которых определяется выбором точки (α, j) из декартова произведения $Z_+ \times \{1,\ldots,p\}$ и рассмотрим $O^p(\xi)$ как топологический модуль над локальным кольцом $O(\xi)$.Из векторного варианта [14, теорема 6.3.5] леммы Круля [10] следует, что *всякий подмодуль топологического* $O(\xi)$*-модуля* $O^p(\xi)$ *замкнут*. Покажем, что аналогичное утверждение справедливо и для топологического $O_\pi(\widetilde{\lambda}_k)$-модуля $O(\widetilde{\lambda}_k)$.

Предложение 3. *Для любого* $\lambda \in \mathrm{C}$ *всякий подмодуль топологического* $O_\pi(\widetilde{\lambda}_k)$*-модуля* $O(\widetilde{\lambda}_k)$ *замкнут.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Представление (5) задает отображение

$$O(\widetilde{\lambda}_k) \to O^p(\xi) \mid f \to (f_j), \qquad (6)$$

где f_j определяется однозначно из соотношения $u_j = f_j \circ r_g$. Если рассматривать $O(\widetilde{\lambda}_k)$ как модуль над локальным кольцом $O_r(\widetilde{\lambda}_k)$, а $O^p(\xi)$ как модуль над локальным кольцом $O(\xi)$, то это отображение является модульным изоморфизмом. Используя правило для нахождения производной сложной функции (и предельный переход по $\zeta \to \xi$ если точка ξ - критическая точка накрытия (g, r_g, Δ)) можно убедиться, что отображение (6) – топологический изоморфизм. В силу леммы Круля всякий подмодуль топологического $O_r(\widetilde{\lambda}_k)$-модуля $O(\widetilde{\lambda}_k)$ замкнут. С другой стороны, всякое r_g-симметричное открытое множество $U \subseteq g$ является π-симметричным, а всякая r_g-симметричная функция, определенная на U, является π-симметричной. Значит, справедливы включения:

$$O_r(U) \subseteq O_\pi(U),\ O_r(\widetilde{\lambda}_k) \subseteq O_\pi(\widetilde{\lambda}_k).$$

Из этих включений вытекает, что всякий подмодуль $O_\pi(\widetilde{\lambda}_k)$-модуля $O(\widetilde{\lambda}_k)$ является подмодулем $O_r(\widetilde{\lambda}_k)$-модуля $O(\widetilde{\lambda}_k)$. Предложение доказано.

Это предложение устанавливает эквивалентность задач локального и проективного описаний. Точнее, пусть I - замкнутый подмодуль в P, $I(\widetilde{\lambda})$ - его локальный подмодуль ассоциированный со слоем $\widetilde{\lambda}$. Так как $I(\widetilde{\lambda})$ - подмодуль $O_\pi(\widetilde{\lambda})$-модуля $O(\widetilde{\lambda})$ и в обозначениях предыдущего пункта $I(\widetilde{\lambda}) = \bigcap_{k\in \mathrm{N}} v_k^{-1}(I(\widetilde{\lambda}_k))$, то учитывая замкнутость каждого $I(\widetilde{\lambda}_k)$ в $O_\pi(\widetilde{\lambda}_k)$-модуле $O(\widetilde{\lambda}_k)$ (предложение 3), получаем, что в топологии $O(\widetilde{\lambda})$ локальный подмодуль $I(\widetilde{\lambda})$ совпадает со своим замыканием . Следовательно, импликации (3) и (4) эквивалентны. Таким образом, справедливо

Предложение 4. *Замкнутый подмодуль* $I \subseteq P$ *является обильным тогда и только тогда, когда он допускает проективное описание.*

§5 Теорема двойственности

Результаты этого параграфа опираются установленные выше предложения и на два следующих предложения – *принцип двойственности и схему двойственности*. Эти предложения приведены в [15], носят общий характер и допускают формулировку в терминах абстрактных локально выпуклых пространств.

1. Принцип двойственности. Пусть *H* - отделимое полурефлексивное локально выпуклое пространство над полем K (R или C); *H** - его сильное сопряженное пространство. Из теоремы о биполяре [10, теорема 8.1.5] вытекает

Принцип двойственности. *Между совокупностью* $\{W\}$ *замкнутых подпространств в H и совокупностью* $\{V\}$ *замкнутых подпространств в H* можно установить взаимно однозначное соответствие по правилу ортогональности:* $W^0 = V, V^0 = W$, *где* W^0 *- аннулятор подпространства* $W \subseteq H$ *в пространстве H*,* V^0 *- аннулятор подпространства* $V \subseteq H^*$ *в пространстве H.*

2. Индуктивное и проективное описания. Пусть M_λ, $\lambda \in \Lambda$, - отделимые полурефлексивные локально выпуклые пространства над полем K; $m_\lambda : M_\lambda \to H$, $\lambda \in \Lambda$, - линейные непрерывные отображения. Выберем произвольное замкнутое подпространство $W \subseteq H$ и каждому $\lambda \in \Lambda$ отнесем замкнутое подпространство

$$W_\lambda = m_\lambda^{-1}(W) \subseteq M_\lambda.$$

Очевидно, что W_λ *- максимальное замкнутое подпространство* M_λ*, образ которого при отображении* m_λ *лежит в W.*

Подпространство $W_\lambda \subseteq M_\lambda$ будем называть *индуктивным подпространством W*. Говорим, что *W допускает индуктивное описание* (относительно семейства отображений m_λ, $\lambda \in \Lambda$), если оно совпадает с замыканием в подпространства, натянутого на объединение

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} m_\lambda(W_\lambda).$$

Согласно принципу аппроксимации [10, теорема 3.3.1], для проверки допустимости замкнутым подпространством *W* индуктивного описания достаточно убедиться в выполнимости включения:

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \left(m_\lambda(W_\lambda)\right)^0 \subseteq W^0. \qquad (7)$$

Обозначим: N_λ - сильное сопряженное к M_λ; $m'_\lambda : H^* \to N_\lambda$ - оператор, сопряженный к m_λ (отображения m'_λ, $\lambda \in \Lambda$, непрерывны [10, Гл.8]). Выберем произвольное замкнутое подпространство $V \subseteq H^*$ и каждому $\lambda \in \Lambda$ отнесем замкнутое подпространство $V_\lambda \subseteq N_\lambda$, совпадающее с замыканием подпространства N_λ, натянутого на $m'_\lambda(V)$. V_λ *- минимальное замкнутое подпространство* N_λ *включающее множество* $m'_\lambda(V)$.

Подпространство $V_\lambda \subseteq N_\lambda$ будем называть *проективным подпространством V*. Говорим, что *V допускает проективное описание* (относительно семейства отображений m'_λ, $\lambda \in \Lambda$), если оно совпадает с пересечением

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} m_\lambda^{-1}(V_\lambda).$$

Для проверки допустимости замкнутым подпространством $V \subseteq H^*$. проективного описания достаточно убедиться в справедливости импликации:

$$S \in H^*, m'_\lambda(S) \in V_\lambda \ \forall \lambda \in \Lambda \Rightarrow S \in V \qquad (8)$$

3. Схема двойственности. Зафиксируем замкнутое подпространство $W \subseteq H$ и его аннулятор $V \subseteq H^*$. В силу принципа двойственности *V* - замкнутое подпространство в *H**. Основой для двойственного перехода от задачи спектрального синтеза к эквивалентной задаче локального описания служит

Схема двойственности. *Для того чтобы замкнутое подпространство $W \subseteq H$ допускало индуктивное описание, необходимо и достаточно, чтобы его аннулятор $V \subseteq H^*$ допускал проективное описание.*

Доказательство это предложения приведено в [15] (§1, *схема двойственности*)

4. Теорема двойственности. $m'_\lambda : \mathrm{H}^* \to (\mathrm{M}_\lambda)^* = \mathrm{N}_\lambda$ - отображение сопряженное к отображению m_λ, $\lambda \in \mathrm{C}$. Оно взаимно однозначно и непрерывно. Выберем произвольные элементы $S \in \mathrm{H}^*$ и $a = a(\alpha,\omega) \in \mathrm{M}_\lambda$. Из соотношений

$$\langle S, m_\lambda(a) \rangle = \left\langle S, \sum_{(\alpha,\omega)\in \mathrm{Z}_\lambda} a(\alpha,\omega)\frac{1}{\alpha!} z^\alpha \exp\{\omega, z\} \right\rangle =$$

$$= \sum_{(\alpha,\omega)\in \mathrm{Z}_\lambda} a(\alpha,\omega) \left\langle S, \frac{1}{\alpha!} z^\alpha \exp_j\{\omega, z\} \right\rangle = \langle m'_\lambda(S), a \rangle$$

вытекает, что отображение m'_λ функционалу $S \in \mathrm{H}^*$ ставит в соответствие элемент

$$\left\langle S, \frac{1}{\alpha!} z^\alpha \exp\{\omega, z\} \right\rangle \in \mathrm{N}_\lambda .$$

Пусть $\varphi = \mathrm{T}(S) \in \mathrm{P}$, где $\varphi(\omega) = \langle S, \exp\{\omega, z\} \rangle$. Тогда

$$m'_\lambda(S) = \left\langle S, \frac{1}{\alpha!} z^\alpha \exp\{\omega, z\} \right\rangle = \frac{1}{\alpha!} D^\alpha \varphi(\omega) = n_\lambda(\varphi) = \mathrm{T}(S) ,$$

то есть $m'_\lambda = n_\lambda \circ \mathrm{T}$. Взаимная однозначность рассматриваемых отображений влечет равенства

$$n_\lambda = m'_\lambda \circ \mathrm{T}^{-1}, \quad (n_\lambda)^{-1} = \mathrm{T} \circ (m'_\lambda)^{-1}. \tag{9}$$

Пусть V - замкнутое подпространство H^*; $I = \mathrm{T}(V)$; $V_\lambda = \overline{m'_\lambda(V)}$ - проективное подпространство V в N_λ. Согласно определению, V допускает проективное описание относительно семейства отображений m'_λ, $\lambda \in \mathrm{C}$, если оно совпадает с пересечением

$$\bigcap_{\lambda \in \mathrm{C}} (m'_\lambda)^{-1}(V_\lambda) .$$

Предложение 5. *Для того чтобы V допускало проективное описание относительно семейства отображений m'_λ, $\lambda \in \mathrm{C}$, необходимо и достаточно, чтобы $I = \mathrm{T}(V)$ допускало проективное описание относительно семейства отображений n_λ, $\lambda \in \mathrm{C}$.*

Доказательство. Преобразование $\mathrm{T} : \mathrm{H}^* \to \mathrm{P}$ является взаимно однозначным, значит, соотношение

$$V = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (m'_\lambda)^{-1}(V_\lambda) \tag{10}$$

имеет место тогда и только тогда, когда $I = \mathrm{T}(V)$ совпадает с множеством

$$\mathrm{T}\Big(\bigcap_{\lambda \in C} (m'_\lambda)^{-1}(V_\lambda) \Big) = \bigcap_{\lambda \in C} \mathrm{T} \circ (m'_\lambda)^{-1}(V_\lambda) .$$

Учитывая равенства (9), имеем

$$I_\lambda = \overline{n_\lambda(I)} = \overline{m'_\lambda \circ \mathrm{T}^{-1}(I)} = \overline{m'_\lambda(V)} = V_\lambda ,$$

$$\bigcap_{\lambda \in C} \mathrm{T} \circ (m'_\lambda)^{-1}(V_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in C} (n_\lambda)^{-1}(V_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in C} (n_\lambda)^{-1}(I_\lambda) .$$

Таким образом, соотношение (10) имеет место тогда и только тогда, когда справедливо соотношение $I = \bigcap_{\lambda \in C} (n_\lambda)^{-1}(I_\lambda)$. Тем самым предложение доказано.

Теперь мы в состоянии доказать основной результат статьи.

Теорема двойственности. *Замкнутое инвариантное подпространство* $W \subseteq \mathrm{H}$ *допускает спектральный синтез тогда и только тогда, когда его аннуляторный подмодуль* $I \subseteq \mathrm{P}$ *является обильным.*

Доказательство. Пусть *W* - замкнутое подпространство в H, инвариантное относительно оператора $\pi(D)$. В силу полурефлексивности H подпространство $V = W^0$ является замкнутым в H^*. Легко проверить, что *V* инвариантно относительно отображения $\pi(D)'$, сопряженного $\pi(D)$. Пусть $I = \mathrm{T}(V)$ - аннуляторное подпространство *W*. В силу того что T - топологический изоморфизм H^* на P, подпространство *I* замкнуто в P. Стандартным образом (см. §3 пункт 1) проверяется, что инвариантность *V* относительно $\pi(D)'$ влечет инвариантность *I* относительно умножений на целую функцию минимального типа $\pi(z)$. Таким образом, *I* обладает структурой замкнутого подмодуля $\mathrm{C}[\pi]$–модуля P. Согласно предложению 1 *W* допускает спектральный синтез тогда и только тогда, когда *W* допускает индуктивное описание относительно системы отображений $m_\lambda,\ \lambda \in \mathrm{C}$. По схеме двойственности индуктивное описание *W* относительно системы отображений $m_\lambda,\ \lambda \in \mathrm{C}$, равносильно проективному описанию *V* относительно системы сопряженных отображений $m'_\lambda,\ \lambda \in \mathrm{C}$. По предложению 5 последнее равносильно проективному описанию аннуляторного подмодуля *I* относительно системы отображений $n_\lambda,\ \lambda \in \mathrm{C}$. Наконец, в силу предложения 4 проективное описание подмодуля *I*, относительно системы отображений $n_\lambda,\ \lambda \in \mathrm{C}$, эквивалентно локальному описанию этого подмодуля. Теорема двойственности доказана.

Автор выражает глубокую благодарность А.Б. Шишкину за постановку задачи, научное руководство и ряд замечаний, повлиявших на содержание данной статьи.

Литература

1. *Красичков-Терновский И.Ф.* Инвариантные подпространства аналитических функций II. Инвариантные подпространства аналитических функций // Мат. сб. 1972. Т. 87 (129). С. 459 - 482.
2. *Schwartz L.* Theorie generale des fonctions moyenne-periodiques // Ann. Math. 1947. V. 48. P. 857 - 929.
3. *Шишкин А.Б.* Вопросы двойственности, связанные с задачей спектрального синтеза для оператора D . Современные проблемы математического анализа / Моск. обл. пед. ин-т. 1987. Деп. в ВИНИТИ 22.06.87. N 4489. С.117 - 133.
4. *Мерзляков С.Г.* О подпространствах аналитических функций, инвариантных относительно оператора кратного дифференцирования // Мат. заметки. 1986. Т.40. N5. С.635 - 639.
5. *Красичков-Терновский И.Ф.* Спектральный синтез в комплексной области для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. 1. Теорема двойственности // Мат. сб. 1991. Т. 182. N 11. С.1559 - 1588.
6. *Шишкин А.Б.* Спектральный синтез для систем дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // ДАН РАН. 355. N 1. 1997. С. 28 - 30.
7. *Ehrenpreis L.* Mean periodic functions // Amer. J. Math. 1955. V. 77. N 2. P. 293 - 326.
8. *Malgrange B.* Existence et approximation des solutions des equations aux derivees partielles et des equations de convolution // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1955 - 1956. V. 6. P. 271 - 355.
9. *Напалков В.В.* Уравнения свертки в многомерных пространствах. - М.: Наука, 1982.
10. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. - М.: Мир, 1969.
11. *Робертсон А., Робертсон В.* Топологические векторные пространства. - М.: Мир, 1967.
12. *Ганинг Р., Росси Х.* Аналитические функции многих комплексных переменных. - М.: Мир, 1969.
13. *Красичков-Терновский И.Ф.* Локальное описание замкнутых идеалов и подмодулей аналитических функций одной переменной. 1 // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. N 1. С. 44 - 66.
14. *Хермандер Л.* Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. - М.: Мир, 1968.

15. *Шишкин А.Б.* Спектральный синтез для систем дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Теорема двойственности. // Мат. сборник. 1998. Т.189, №9. С.143 – 160.

Spectral synthesis for the endless differential operator with constant coefficients. Duality theorem

A.N. Chernyshov

We say that closed invariant subspace W admits spectral synthesis, if it coincides with the closure the-linear span of the root elements of operator that belong to W. The problem of spectral synthesis of operator is as follows: find conditions ensuring that a closed invariant subspace W admits spectral synthesis. One of the modern ways of deciding the problems of spectral synthesis is connected with transition to an equivalent problem of local description. In this work realized duality transition from the problem of spectral synthesis for endless differential operator with constant coefficients to corresponding problem of local description of entire functions of exponential growth.

