2001 г. №6

Труды ФОРА

О НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА ГРОНУОЛЛА-БЕЛЛМАНА СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

С. Н. Асхабов

Майкопский государственный технологический институт, г. Майкоп

В статье получены неравенства типа Гронуолла-Беллмана в случае степенной нелинейности и бесконечного промежутка. Дано сравнение с известными результатами.

Известно [1], [2], что исследование различных нелинейных дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений на существование, единственность, устойчивость и зависимость решения от параметров часто сводится к оценке функций, удовлетворяющих неравенствам вида:

$$u(x) \leq \int\limits_{x_o}^{x} k(x,t)\, u^{\nu}(t)\, dt + f(x), \quad x \geq x_o. \tag{1}$$

В этой связи представляют интерес следующие теоремы (ср. [2, §2]).

Теорема 1. Пусть неотрицательная и непрерывная на $[x_o, \infty)$ функция $u(x)$ удовлетворяет неравенству (1), где $0 < \nu < 1$, $k(x,t)$ определена при $x_o \leq t \leq x$, неотрицательна и непрерывна, $k'_x(x,t)$ неотрицательна и непрерывна по x равномерно относительно t, а $f(x)$ неотрицательна и неубывает на $[x_o, \infty)$. Тогда

$$u(x) \leq \left\{ (1-\nu) \int\limits_{x_o}^{x} k(x,t)\, dt + f^{1-\nu}(x) \right\}^{1/(1-\nu)} \quad \forall x \geq x_o. \tag{2}$$

Доказательство. Положим в (1) $\int\limits_{x_o}^{x} k(x,t)\, u^{\nu}(t)\, dt = R(x)$. Тогда

$$u(x) \leq R(x) + f(x) \quad \forall x \geq x_o. \tag{3}$$

В силу (3) $\forall t \geq x_o$ имеем

$$R'(t) \leq k(t,t)\, [R(t) + f(t)]^{\nu} + \int\limits_{x_o}^{t} k'_t(t,s)\, [R(s) + f(s)]^{\nu} ds. \tag{4}$$

Учитывая, что $k'_t(t,s) \geq 0$, а $R(t) + f(t)$ не убывает, из (4) для почти всех $t \geq x_o$ имеем

$$R'(t) + f'(t) \leq \left[k(t,t) + \int\limits_{x_o}^{t} k'_t(t,s)\, ds \right] \cdot [R(t) + f(t)]^{\nu} + f'(t),$$

$$[R'(t) + f'(t)] \cdot [R(t) + f(t)]^{-\nu} \leq k(t,t) + \int\limits_{x_o}^{t} k'_t(t,s)\, ds + f^{-\nu}(t) \cdot f'(t).$$

Интегрируя в пределах от x_o до x и учитывая, что $R(x_o) = 0$, получаем

$$[R(x) + f(x)]^{1-\nu} \leq (1-\nu) \int\limits_{x_o}^{x} \left[k(t,t) + \int\limits_{x_o}^{t} k'_t(t,s)\, ds \right] dt + f^{1-\nu}(x) =$$

$$= (1-\nu)\int\limits_{x_o}^{x} k(x,t)\,dt + f^{1-\nu}(x) \quad \forall x \geq x_o.$$

Воспользовавшись теперь неравенством (3) легко получаем оценку (2).

Отметим, что теорема 1.19 (Butler G., Rogers T.) [2, с. 37] (см., также, следствие 6.2 в [1, с. 116]), где рассматриваются функции, ограниченные на конечном отрезке $[c,d]$, и следствие 1 [2, с. 39] из нее, полученное для отрезка $[c,d'] \subset [c,d]$, не охватывают теорему 1, относящуюся к бесконечному промежутку $[x_o,\infty)$.

Покажем теперь, что в часто рассматриваемом [1], [2] частном случае $k(x,t) = \alpha(x)\cdot\beta(t)$ можно отказаться не только от требования дифференцируемости функции $\alpha(x)$, но и от требования ее монотонности. Напомним, что неотрицательная функция $\varphi(x)$, заданная на $[x_o,\infty)$, называется **почти убывающей с константой** C_φ, если существует постоянная $C_\varphi \geq 1$ такая, что $\varphi(x_2) \leq C_\varphi \cdot \varphi(x_1)$ при $x_1 < x_2$. При этом под C_φ понимается наименьшая из констант, для которых выполняются условия этого определения. Поэтому, например, любая невозрастающая функция $\varphi(x)$, возрастающая функция $\varphi(x) = 1 + th\,x$ и немонотонная функция $\varphi(x) = 2 + \sin x$ являются почти убывающими на $[0,\infty)$ с константами C_φ равными, соответственно, 1, 2 и 3.

Теорема 2. Пусть неотрицательная и непрерывная на $[x_o,\infty)$ функция $u(x)$ удовлетворяет неравенству:

$$u(x) \leq \alpha(x)\int\limits_{x_o}^{x} \beta(t)\cdot u^{\nu}(t)\,dt + f(x), \quad x \geq x_o, \quad 0<\nu<1, \tag{5}$$

где $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $f(x)$ неотрицательны на $[x_o,\infty)$, причем $\alpha(x)$ почти убывает с константой $C_\alpha \geq 1$, $\beta(x)$ интегрируема, а $f(x)$ не убывает. Тогда

$$u(x) \leq \left[(1-\nu)\,C_\alpha\int\limits_{x_o}^{x} \alpha(t)\cdot\beta(t)\,dt + f^{1-\nu}(x)\right]^{1/(1-\nu)} \quad \forall x \geq x_o. \tag{6}$$

Доказательство. Так как $\alpha(x)$ почти убывающая функция, то, по определению, $\alpha(x) \leq C_\alpha\alpha(t)$ при $t \leq x$. Поэтому, из (5) имеем

$$u^{\nu}(x) \leq \left[C_\alpha\int\limits_{x_o}^{x} \alpha(t)\cdot\beta(t)\cdot u^{\nu}(t)\,dt + f(x)\right]^{\nu} = G(x). \tag{7}$$

Из (7) для почти всех $t \geq x_o$, последовательно получаем

$$C_\alpha\cdot\alpha(t)\cdot\beta(t)\cdot u^{\nu}(t) + f'(t) \leq C_\alpha\cdot\alpha(t)\cdot\beta(t)\cdot G^{\nu}(t) + f'(t),$$

$$G^{-\nu}(t)\cdot G'(t) \leq C_\alpha\cdot\alpha(t)\cdot\beta(t) + G^{\nu}(t) + f'(t) \leq C_\alpha\cdot\alpha(t)\cdot\beta(t) + f^{\nu}(t)\cdot f'(t).$$

Интегрируя левую и правую части последнего выражения, имеем:

$$G^{1-\nu}(x) - G^{1-\nu}(x_o) \leq$$

$$\leq (1-\nu)\left(C_\alpha\int\limits_{x_o}^{x} \alpha(t)\cdot\beta(t)\,dt + \frac{1}{1-\nu}[f^{1-\nu}(x) - f^{1-\nu}(x_o)]\right) \quad \forall x \geq x_o,$$

откуда $G(x) \leq \left[(1-\nu)\,C_\alpha\int\limits_{x_o}^{x} \alpha(t)\cdot\beta(t)\,dt + f^{1-\nu}(x)\right]^{1/(1-\nu)}$. Следовательно, оценка (6) является следствием неравенства (7).

Следствие 1 (ср. [2, с. 29]). Если $u(t) \le f(t) + c\int\limits_{t_o}^{t} \beta(s)\, u^{\nu}(s)\, ds$, $c \ge 0$, то

$$u(t) \le \left[(1-\nu)\, c \int\limits_{t_o}^{t} \beta(s)\, ds + f^{1-\nu}(t) \right]^{1/(1-\nu)}. \tag{8}$$

Следствие 2 (ср. [3]). Пусть $x(t)$ и $f(t)$ являются неотрицательными непрерывными функциями, определенными на интервале $[0,\infty)$. Если $n(t)$ - положительная неубывающая функция, определенная на $[0,\infty)$ и

$$x^p(t) \le n^p(t) + \int\limits_0^t f(s)\cdot x(s)\, ds, \quad p>1, \quad t\in[0,\infty),$$

то

$$x(t) \le \left[n^{p-1}(t) + \frac{p-1}{p} \int\limits_0^t f(s)\, ds \right]^{1/(p-1)}. \tag{9}$$

Замечание 1. Если в теореме 2 взять $\alpha(x) = A \ge 0$ и $f(x) = B \ge 0$, то правая часть (6) является решением неравенства (5) и обращает его в равенство. Значит, оценка (6), как и оценки (2), (8) и (9), в определенном смысле неулучшаема.

Замечание 2. Если в (5) изменить знак неравенства на противоположный, то имеет место аналог теоремы 2 в предположении, что $f(x)$ не возрастает, а $\alpha(x)$ почти возрастает с константой C_α. При этом в (6) знак неравенства так же изменяется на противоположный, а коэффициент перед интегралом заменяется на $(1-\nu)/C_\alpha$.

Замечание 3. Оценка (9) в следствии 2 точнее оценки

$$x(t) \le n(t)\cdot \left[1 + \frac{p-1}{p} \int\limits_0^t f(s)\cdot n^{1-p}(s)\, ds \right]^{1/(p-1)},$$

полученной в [3], так как последняя оценка непосредственно вытекает из (9). Кроме того, следствие 2, в отличие от [3], где предполагается $p \ge 2$, охватывает также случай $1<p<2$ и (9) совпадает при $p=2$ с оценкой из следствия 2 (Ou-Iang Liang) [2, с. 39].

Замечание 4. В связи со следствием 1 отметим, что в [1, с. 72] и [2, с. 29] $t_o = 0$ и все рассматриваемые функции неотрицательны и непрерывны на конечном отрезке $[0,h]$. При этих условиях, в [1] и [2] доказана оценка (Ш.Г.Гамидов)

$$u(t) \le f(t) + c\cdot \xi_o^{\nu}\cdot \left(\int\limits_0^t \beta^{1/(1-\nu)}(s)\, ds \right)^{1-\nu},$$

где ξ_o есть предел некоторой громоздкой числовой последовательности $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ специального вида. В [2, с. 48] отмечено, что практическое нахождение ξ_o возможно лишь приближенно, поэтому эта оценка менее эффективна, чем (8). Кроме того, при $f(t) = a_1 \ge 0$ оценка (8) совпадает с оценкой (1.19) из [1, с. 69], где $c = a_2 \ge 0$, $\nu = 1-q$ и $\beta(s) = h(s)$. В отличие от [1] и [2], теорема 2 доказана в случае бесконечного промежутка $[x_o,\infty)$ и без условия непрерывности функций $f(x)$ и $\beta(x)$. Однако, следует подчеркнуть, что в [1] и [2] не предполагается, что $f(x)$ является неубывающей функцией.

Замечание 5. Оценки (6), (8) и (9) являются аналогами априорной оценки сверху, полученной в [4, с. 58], для решений одного нелинейного интегрального уравнения типа свертки, возникающего в теории фильтрации.

Докажем, наконец, следующие две теоремы. Для удобства сравнения с известными результатами из [1], так же как и в следствии 2, будем придерживаться обозначений цитируемых работ.

Теорема 3. Пусть функции $u(t)$, $g(t)$, $h(t)$ неотрицательны при $t \geq \alpha$, причем $u(t)$ непрерывна, а $g(t)$ и $h(t)$ - интегрируемы. Если $a > 0$ и выполнено неравенство

$$u(t) \leq a + \int_{\alpha}^{t} g(s) \cdot u(s)\, ds + \int_{\alpha}^{t} h(s) \cdot u^p(s)\, ds, \quad 0 < p < 1, \quad t \geq \alpha, \tag{10}$$

то

$$u(t) \leq a \cdot \exp\left(\int_{\alpha}^{t} [g(s) + a^{p-1} h(s)]\, ds\right). \tag{11}$$

Доказательство. Обозначив правую часть (10) через $G(t)$, имеем

$$u(t) \leq G(t) \quad \text{и} \quad u^p(t) \leq G^p(t). \tag{12}$$

Из (12) следует, что

$$g(t) \cdot u(t) + h(t) \cdot u^p(t) \leq g(t) \cdot G(t) + h(t) \cdot G^p(t). \tag{13}$$

Так же как и при доказательстве теорем 1 и 2, разделив обе части (13) на $G(t)$ и затем интегрируя, с учетом, что $G(t) \geq a$, получим:

$$\ell n\, G(t) - \ell n\, a \leq \int_{\alpha}^{t} g(s)\, ds + a^{p-1} \int_{\alpha}^{t} h(s)\, ds.$$

Последнее неравенство равносильно (11) - что и требовалось доказать.

Заметим, что оценка (11) проще оценки (1.4), приведенной в [1, с. 67] с опечатками во втором слагаемом, и совпадает с ней при $h(t) = 0$. Кроме того, в теореме 3 не требуется непрерывности функций $g(t)$ и $h(t)$. Однако, доказательство оценки (11) существенно использует дополнительное условие, что $a > 0$.

Теорема 4. Пусть функции $u(t)$, $a(t)$, $b(t)$, $h(t)$ - непрерывны и неотрицательны на $[\alpha, \infty]$. Если при $1 \leq p < \infty$ выполняется неравенство

$$u(t) \leq a(t) + b(t) \left(\int_{\alpha}^{t} h(s)\, u^p(s)\, ds\right)^{1/p}, \quad t \geq \alpha, \tag{14}$$

то при всех $t \geq \alpha$ справедлива оценка

$$u(t) \leq \left(a(t)\, c(t) + b(t)\, c(t) \int_{\alpha}^{t} a(s)\, c(s)\, h(s)\, \exp\left\{\int_{s}^{t} b(r)\, c(r)\, h(r)\, dr\right\} ds\right)^{1/p}, \tag{15}$$

где $c(t) = [a(t) + b(t)]^{p-1}$.

Доказательство. При $p = 1$ неравенство (14) является линейным и оценка (15) совпадает с известной оценкой (1.10) из [2, с. 11]. Пусть $p > 1$ и $q = p/(p-1)$. Из (14), с учетом неравенства (H_o) из [5, с. 54], имеем

$$u(t) \leq a(t) + b^{1/q}(t) \left(b(t) \int_{\alpha}^{t} h(s)\, u^p(s)\, ds\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq [a(t)+b(t)]^{1/q}\cdot\left[a(t)+b(t)\cdot\int\limits_{\alpha}^{t}h(s)\,u^p(s)\,ds\right]^{1/p}.$$

Возводя в степень p и учитывая, что $p/q=p-1$, получаем

$$u^p(t)\leq [a(t)+b(t)]^{p-1}\cdot\left[a(t)+b(t)\cdot\int\limits_{\alpha}^{t}h(s)\,u^p(s)\,ds\right].$$

Положим $u^p(t)=v(t)$, $c(t)\cdot a(t)=m(t)$, $c(t)\cdot b(t)=n(t)$. Тогда имеем линейное неравенство:

$$v(t)\leq m(t)+n(t)\cdot\int\limits_{\alpha}^{t}h(s)\,v(s)\,ds.$$

По теореме 1.4 (П.В.Харламов) [1, с. 11] получаем

$$v(t)\leq m(t)+n(t)\cdot\int\limits_{\alpha}^{t}m(s)\cdot h(s)\cdot\exp\left\{\int\limits_{s}^{t}n(r)\cdot h(r)\,dr\right\}ds,$$

что равносильно оценке (15).

Замечание 6. Оценка (15) проще оценки

$$u(t)\leq a(t)+b(t)\,\frac{\left(\int_{\alpha}^{t}h(s)\,a^p(s)\,\exp\left\{-\int_{\alpha}^{s}h(r)\,b^p(r)\,dr\right\}ds\right)^{1/p}}{1-\left[1-\exp\left\{-\int_{\alpha}^{t}h(r)\,b^p(r)\,dr\right\}\right]^{1/p}},\tag{16}$$

полученной в теореме 1.8 (D.Willett, J.S.W.Wong) [1, с. 73] в случае отрезка $[\alpha,\beta]$. Заметим также, что оценки (15) и (16) при $p=1$ совпадают с известной оценкой (L.Giuliano, П.Харламов, D.Willett, J.Wong, P.Beesack) [1, с. 21], [2, с. 11].

Литература

1. *Мартынюк А.А., Лакшмикантам В., Лила С.* Устойчивость движения: метод интегральных неравенств. Киев: Наукова Думка. 1989.
2. *Филатов А.Н., Шарова Л.В.* Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. М.: Наука. 1976.
3. *El-Owaidy H., Ragab A., Abdeldaim A.* On some new integral inequalities of Gronwall-Bellman type // Appl. Math. and Comput. 1999. V. 106. N2-3. P. 289-303.
4. *Askhabov S.N.* Integral equations of convolution type with power nonlinearity // Colloq. Math. 1991. Vol. 62. № 1. P. 49-65.
5. *Харди Г.Г., Литтльвуд Д.Е., Полиа Г.* Неравенства. М.: ИЛ. 1948.

On inequalities of Gronwall-Bellman type with power nonlinearity

S. N. Askhabov

The integral inequalities of Volterra type with a power nonlinearity in the class of continuous nonnegative functions are considered.

