2001 г. №6

Т р у д ы Ф О Р А

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЕРТКИ ГРАДИЕНТНЫМ МЕТОДОМ

С. Н. Асхабов

Майкопский государственный технологический институт, Майкоп

В статье получены теоремы существования и единственности решения в пространствах Лебега для уравнений типа свертки со степенной нелинейностью и показано, что эти решения можно найти градиентным методом.

В работе [1] (см., также, обзорные статьи [2], [3]) были рассмотрены различные классы нелинейных интегральных уравнений типа свертки (НИУС) на оси R, полуоси $R_+ = [0, \infty)$ и отрезке $[-\pi, \pi]$ (в периодическом случае). С помощью метода монотонных (по Браудеру-Минти) операторов в указанных работах были получены теоремы существования и единственности решений в вещественных пространствах Лебега L_p и L_p с весом. В случае гильбертова пространства L_2, путем комбинирования метода монотонных операторов и принципа сжимающих отображений, было показано, что решения этих НИУС могут быть найдены методом последовательных приближений пикаровского типа. Однако, ограничения, накладывавшиеся в случае L_2, не допускали степенную нелинейность. Более того, использованная техника исследования не позволяла приближенно решать (методом последовательных приближений) рассматриваемые НИУС даже в гильбертовом пространстве L_2 с весом, не говоря уже о L_p, $p \neq 2$, или, тем более, L_p с весом. В этой связи возникла задача о приближенном решении НИУС со степенной нелинейностью в пространствах L_p и L_p с весом. Интерес к таким уравнениям вызван их приложениями в теориях фильтрации, ударных волн, следящих систем и других (см., например, [3]).

В настоящей работе, используя методы теории потенциальных монотонных операторов [4], [5], показано, что интегральные уравнения типа свертки с нечетностепенной нелинейностью допускают приближенное решение в соответствующих пространствах L_p и L_p с весом итерационными методами градиентного типа (или наискорейшего спуска).

1. Основные обозначения. Пусть $\varrho(x)$ есть неотрицательная почти всюду конечная и почти всюду отличная от нуля измеримая на Γ функция, где $\Gamma = R$, либо $\Gamma = R_+$, либо $\Gamma = [-\pi, \pi]$ (в периодическом случае). Обозначим через $||u||_{p,1} = \left\{ \int\limits_\Gamma \varrho(x)\, |u(x)|^p dx \right\}^{1/p}$, $p > 1$, норму в вещественном весовом пространстве Лебега $L_p(\Gamma, \varrho)$ (при $\varrho(x) = 1$ пишем просто $||u||_p$ и $L_p(\Gamma)$, соответственно), а через $||u||_{q,1-q}$ - норму в сопряженном с ним пространстве $L_q(\Gamma, \varrho^{1-q})$, $q = p/(p-1)$. Введем в рассмотрение операторы свертки H и N:

$$(Hu)(x) = \int\limits_\Gamma h(x-t)\, u(t)\, dt, \quad (Nu)(x) = b(x) \int\limits_\Gamma b(t)\, h(x-t)\, u(t)\, dt.$$

Ядро $h(x)$ всюду ниже предполагается суммируемым в соответствующем промежутке, т.е $h(x) \in L_1(R)$ при $\Gamma = R$ и $\Gamma = R_+$, и $h(x) \in L_1(-\pi, \pi)$ при $\Gamma = [-\pi, \pi]$ (в этом случае ещё предполагается, что $h(x)$ продолжена 2π - периодически на отрезок $[-2\pi, 2\pi]$).

Будем, в основном, придерживаться терминологии и обозначений, принятых в [5, с. 79]. Пусть X есть вещественное рефлексивное банахово пространство и X^* - сопряженное с ним пространство. Обозначим через $\langle \varphi, u \rangle$ значение линейного непрерывного функционала $\varphi \in X^*$ на элементе $u \in X$.

Оператор $A : X \to X^*$ называется:

ограниченно липшиц-непрерывным, если существует возрастающая на R_+ функция μ такая, что $\forall u, v \in X$

$$\| Au - Av \|_* \leq \mu(r) ||u - v||, \quad \text{где } r = \max(||u||, ||v||);$$

равномерно монотонным, если существует возрастающая на R_+ функция β такая, что $\beta(0)=0$ и

$$\langle Au-Av, u-v\rangle \geq \beta(||u-v||) \;\; \forall u,v\in X.$$

Для доказательства основных результатов, нам понадобятся (см. [5]):

Теорема 1.1. Пусть $A: X\to X^*$ деминепрерывный равномерно монотонный оператор. Тогда уравнение $Au=f$ имеет единственное решение $u^*\in X$ при любом $f\in X^*$. Если, кроме того, X и X^* строго выпуклые пространства, а оператор A является потенциальным ограниченно липшиц-непрерывным, то последовательность

$$u_{n+1}=u_n-\delta_n\cdot J^*(Au_n-f),$$

где $n=0,1,2,3,\ldots$, $\delta_n=\min\{1, 2/[\varepsilon+\mu(||u_n||+||Au_n-f||_*)]\}$, $J^*: X^*\to X$ - дуализующее отображение для X^*, $\varepsilon>0$ - произвольное число, сходится к u^* по норме пространства X.

Лемма 1.1. Пусть X_1 и X_2 есть банаховы пространства, причем X_1 плотно вложено в X_2 с константой вложения $C_{12}>0$. Если линейный оператор A действует ограниченно из X_2 в X_2^*, то он действует ограниченно из X_1 в X_1^*, причем

$$||Ax||_{X_1^*}\leq ||A||_{X_2\to X_2^*}\cdot C_{12}^2\cdot ||x||_{X_1} \;\; \forall x\in X_1. \tag{1.1}$$

Существование и единственность решения u^* в теореме 1.1 вытекает из теоремы Браудера-Минти [5, с. 95], а сильная сходимость последовательности $\{u_n\}$ к u^* по указанной схеме - из теоремы 4.2 [5, с. 122] и замечания 4.13 [5, с. 125], поскольку всякий равномерно монотонный оператор является строго монотонным коэрцитивным оператором и обладает (S)-свойством [5, с. 80-81]. Указанный в теореме 1.1 способ нахождения решения u^* известен [5] как метод наискорейшего спуска (или градиентный метод).

Докажем оценку (1.1) из леммы 1.1. Пусть $x\in X_1$ - произвольный элемент. Тогда, по условию, тем более $x\in X_2$ и $||x||_{X_2}\leq C_{12}\cdot||x||_{X_1}$ $\forall x\in X_1$. Так как, по условию, оператор A действует ограниченно из X_2 в X_2^*, то $Ax\in X_2^*$ и $||Ax||_{X_2^*}\leq ||A||_{X_2\to X_2^*}\cdot||x||_{X_2}$ $\forall x\in X_1$. Так как X_2^* вложено в X_1^* с константой вложения, не превосходящей C_{12} [5, с. 24], то тем более $Ax\in X_1^*$ и $||Ax||_{X_1^*}\leq C_{12}\cdot||Ax||_{X_2^*}$ $\forall x\in X_1$. Отсюда, используя предыдущие два неравенства, получаем оценку (1.1).

2. Сучай пространств $L_p(\Gamma)$. Рассмотрим в пространстве $L_{1+\alpha}(R)$, $\alpha\geq 1$, НИУС вида:

$$u^\alpha(x)+b(x)\int_{-\infty}^{\infty} b(t)\,h(x-t)\,u(t)\,dt=f(x). \tag{2.1}$$

Предполагается, что выполнены следующие условия:

$$b(x)\in L_{2(\alpha+1)/(\alpha-1)}(R) \;\text{ при } \alpha>1 \;\text{ и }\; \underset{-\infty<x<\infty}{sup\,vrai}\;|b(x)|<\infty \;\text{ при } \alpha=1, \tag{2.2}$$

$$h(x)\in L_1(R) \;\text{ и }\; \hat{h}_c(x)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,\cos(x\,t)\,dt\geq 0 \;\text{ для почти всех } x\geq 0 \tag{2.3}$$

(символ $\hat{}$ означает преобразование Фурье).

Лемма 2.1. Если выполнены условия (2.2) и (2.3), то оператор свертки N действует из $L_{1+\alpha}(R)$, $\alpha\geq 1$, в $L_{1+1/\alpha}(R)$ и является непрерывным положительным оператором, причем

$$||Nu||_{1+1/\alpha}\leq ||b||^2_{2(\alpha+1)/(\alpha-1)}||h||_1||u||_{1+\alpha} \;\; \forall u\in L_{1+\alpha}(R). \tag{2.4}$$

Если, дополнительно, $h(x)$ - четная функция, то N - самосопряженный потенциальный оператор, причем

$$Nu=\frac{1}{2}\,grad\,g(u), \;\; g(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}_c(x)\,|\widehat{b\cdot u}(x)|^2dx, \tag{2.5}$$

где $g(u)$ - потенциал оператора N.

Доказательство. Пусть $u(x) \in L_{1+\alpha}(R)$ - произвольная функция. Так как $b(x) \in L_{2(\alpha+1)/(\alpha-1)}(R)$, то, в силу неравенства Гельдера, $b(x) \cdot u(x) \in L_2(R)$ и $||b \cdot u||_2 \leq ||b||_{2(\alpha+1)/(\alpha-1)}||u||_{1+\alpha}$. Далее, поскольку $||Hw||_2 \leq ||h||_1||w||_2 \quad \forall w \in L_2(R)$, то с учетом (1.1), имеем

$$||Nu||_{1+1/\alpha} = ||b \cdot H(bu)||_{1+1/\alpha} \leq ||b||_{2(\alpha+1)/(\alpha-1)}||H(bu)||_2 \leq$$

$$\leq ||b||_{2(\alpha+1)/(\alpha-1)}||y||_1||bu||_2 \leq ||b||^2_{2(\alpha+1)/(\alpha-1)}||h||_1||u||_{1+\alpha}.$$

Следовательно, оператор N действует непрерывно из $L_{1+\alpha}(R)$ в $L_{1+1/\alpha}(R)$ и выполняется неравенство (2.4).

Далее, в силу равенства (5.3) из [2, с. 62], имеем

$$\langle Nu, u\rangle = (H(bu), bu) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{h}_c(x)\,|\widehat{b\,u}(x)|^2 dx. \tag{2.6}$$

(символ $(\cdot,\cdot)$ означает скалярное произведение в L_2). Из (2.6), в силу условия (2.3), получаем, что N - положительный оператор. Наконец, поскольку, в силу четности ядра $h(x)$ и условия (2.3),

$$\hat{h}(x) = \hat{h}_c(x) + i \cdot \hat{h}_s(x) = \hat{h}_c(x) = \overline{\hat{h}_c(x)} = \overline{\hat{h}(x)}$$

(черта означает комплексное сопряжение) и $\forall u, v \in L_{1+\alpha}(R)$

$$\langle Nu, v\rangle = (\hat{h} \cdot \widehat{b\,u}, \overline{\widehat{b\,v}}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(x) \cdot \widehat{b\,u}(x) \cdot \overline{\widehat{b\,v}(x)}\,dx,$$

$$\langle u, Nv\rangle = (\widehat{b\,u}, \overline{\hat{h} \cdot \widehat{b\,v}}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{h}(x)} \cdot \widehat{b\,u}(x) \cdot \overline{\widehat{b\,v}(x)}\,dx,$$

то $N = N^*$, где N^* - сопряженный с N оператор. Поэтому [4, с. 63] оператор свертки N является потенциальным, причем правая часть равенства (2.6) представляет собой его потенциал, т.е справедливы формулы (2.5).

Теорема 2.1. Пусть $\alpha = r/s \in [1, \infty)$, где $r, s = 1, 3, 5, \ldots$ - нечетные числа, и выполнены условия (2.2) и (2.3). Тогда уравнение (2.1) имеет единственное решение $u^*(x) \in L_{1+\alpha}(R)$ при любом $f(x) \in L_{1+1/\alpha}(R)$. Если, дополнительно, ядро $h(x)$ является четной функцией и $\alpha \geq 3$ - нечетное число, то это решение может быть найдено методом последовательных приближений по формуле:

$$u_{n+1} = u_n - \delta_n \cdot ||Au_n - f||^{1-1/\alpha}_{1+1/\alpha} \cdot |Au_n - f|^{-1+1/\alpha} \cdot [Au_n - f], \tag{2.7}$$

где $u_0(x) \in L_{1+\alpha}(0, \infty)$ - начальное приближение, $Au = u^\alpha + Nu$,

$$\delta_n = \min\left(1, \frac{2}{\varepsilon + \alpha \cdot (||u_n||_{1+\alpha} + ||Au_n - f||_{1+1/\alpha})^{\alpha-1} + ||b||^2_\gamma ||h||_1}\right), \tag{2.8}$$

$\varepsilon > 0$ - любое число, $\gamma = 2(\alpha + 1)/(\alpha - 1)$.

Доказательство. Существование и единственность решения уравнения (2.1) вытекает из теоремы 8.2 работы [6, с. 70]. Отметим, что в этой теореме 8.2 не требуется четности ядра.

Осталось доказать, что последовательность (2.7) сходится к $u^*(x)$ по норме пространства $L_{1+\alpha}(R)$. Воспользуемся теоремой 1.1. Для этого запишем уравнение (2.1) в операторном виде:

$$Au = f, \quad \text{где } Au = u^\alpha + Nu. \tag{2.9}$$

Очевидно, что оператор A действует из $L_{1+\alpha}(R)$ в $L_{1+1/\alpha}(R)$. Известно, что оба этих пространства являются строго выпуклыми и дуализующее отображение J^* для пространства $L_{1+1/\alpha}(R)$ имеет вид [5, с. 125]:

$$J^*w(\cdot) = ||w||_{1+1/\alpha}^{1-1/\alpha} \cdot |w(\cdot)|^{1/\alpha - 1} \cdot w(\cdot). \tag{2.10}$$

Покажем, что оператор A является ограниченно липшиц-непрерывным. Для любых $u, v \in L_{1+\alpha}(R)$, имеем

$$||Au - Av||_{1+1/\alpha} \le ||u^\alpha - v^\alpha||_{1+1/\alpha} + ||N(u-v)||_{1+1/\alpha} = I_1 + I_2.$$

Так как $|t^\alpha - s^\alpha| \le (\alpha/2)\cdot|t-s|\cdot(t^{\alpha-1} + s^{\alpha-1}) \quad \forall t, s \in R$ и нечетном $\alpha \ge 3$, то

$$I_1 \le \frac{\alpha}{2}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |u(x) - v(x)|^{1+1/\alpha}|u^{\alpha-1}(x) + v^{\alpha-1}(x)|^{1+1/\alpha}dx\right)^{\alpha/(\alpha+1)} \le$$

$$\le \frac{\alpha}{2}\,||u-v||_{1+\alpha}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |u^{\alpha-1}(x) + v^{\alpha-1}(x)|^{(\alpha+1)/(\alpha-1)}dx\right)^{(\alpha-1)/(\alpha+1)} \le$$

$$\le \frac{\alpha}{2}\,||u-v||_{1+\alpha}\left(||u||_{1+\alpha}^{\alpha-1} + ||v||_{1+\alpha}^{\alpha-1}\right) \le \alpha\cdot r^{\alpha-1}\cdot||u-v||_{1+\alpha},$$

где $r = \max(||u||_{1+\alpha}, ||v||_{1+\alpha})$. Таким образом, с учетом (2.4), имеем

$$||Au - Av||_{1+1/\alpha} \le \mu(r)\cdot||u-v||_{1+\alpha}, \tag{2.11}$$

где $\mu(r) = \alpha\cdot r^{\alpha-1} + ||b||^2_{2(\alpha+1)/(\alpha-1)}||h||_1$ - возрастающая на R_+ функция. Значит, A - ограниченно липшиц-непрерывный оператор.

Покажем теперь, что A - равномерно монотонный оператор. Используя лемму 2.1 и неравенство $(t^\alpha - s^\alpha)\cdot(t-s) \ge 2^{1-\alpha}|t-s|^{\alpha+1}$, справедливое для всех $t, s \in R$ (см., например, [7, с. 33]), имеем

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \ge \int\limits_{-\infty}^{\infty} [u^\alpha(x) - v^\alpha(x)]\cdot[u(x) - v(x)]\,dx \ge$$

$$\ge 2^{1-\alpha}\cdot||u-v||_{1+\alpha}^{1+\alpha} = \beta(||u-v||_{1+\alpha}) \quad \forall u, v \in L_{1+\alpha}(R),$$

где $\beta(s) = 2^{1-\alpha}s^{\alpha+1}$ - строго возрастающая на R_+ функция такая, что $\beta(0) = 0$, т.е. A - равномерно монотонный оператор.

Далее, поскольку $Fu = u^\alpha$ - потенциальный оператор с потенциалом $g(u) = ||u||_{1+\alpha}^{1+\alpha}/(1+\alpha)$ (см. [4], пример 5.1, где следует взять $g(v,x) = v^\alpha(x)$, $B = R$), то с учетом леммы 2.1 получаем, что оператор A также является потенциальным.

Следовательно, на основании теоремы 1.1, последовательность (2.7) сходится к $u^*(x)$ по норме пространства $L_{1+\alpha}(R)$ - что и требовалось доказать.

Замечание 2.1. Используя леммы 9.1 и 10.1 из [6], аналогичные результаты можно установить для более общих уравнений вида

$$u^\alpha(x) + \sum_i b_i(x)\int\limits_\Gamma b_i(t)\cdot h_i(x-t)\cdot u(t)\,dt = f(x)$$

в пространствах $L_p(\Gamma)$ при $\Gamma = R$, $\Gamma = R_+$ и $\Gamma = [-\pi, \pi]$ (в периодическом случае).

3. Случай весовых пространств $L_p(\Gamma, \varrho)$. Рассмотрим в пространстве $L_p(\Gamma, \varrho)$ НИУС вида:

$$\varrho(x)\cdot u^\alpha(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x-t)\,u(t)\,dt = f(x), \quad \alpha \ge 1. \tag{3.1}$$

На вес $\varrho(x)$ накладывается следующее ограничение:

$$c(\varrho)=\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}[\varrho(x)]^{2/(1-\alpha)}dx\right)^{(\alpha-1)/2(\alpha+1)}<\infty \tag{3.2}$$

(при $\alpha=1$ под $c(\varrho)$ понимается $\underset{-\infty<x<\infty}{sup\,vrai}\;|\varrho(x)|$).

Лемма 3.1. Если выполнены условия (2.3) и (3.2), то оператор свертки H действует из $L_{1+\alpha}(R,\varrho)$, в $L_{1+1/\alpha}(R,\varrho^{-1/\alpha})$ и является непрерывным положительным оператором, причем

$$||Hu||_{1+1/\alpha,-1/\alpha}\le c^2(\varrho)\cdot||h||_1\cdot||u||_{1+\alpha,1}\quad\forall u\in L_{1+\alpha}(R,\varrho). \tag{3.3}$$

Если, дополнительно, $h(x)$ - четная функция, то H - самосопряженный потенциальный оператор, причем

$$Hu=\frac{1}{2}\,grad\,g(u),\quad g(u)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{h}_c(x)\,|\hat{u}(x)|^2dx, \tag{3.4}$$

где $g(u)$ - потенциал оператора свертки H.

Доказательство. Применяя лемму 1.1 при $X_1=L_{1+\alpha}(R,\varrho)$, $X_2=L_2(R)$, $C_{12}=c(\varrho)$ и $||A||=||h||_1$, получаем, что оператор H действует непрерывно из $L_{1+\alpha}(R,\varrho)$ в $L_{1+1/\alpha}(R,\varrho^{-1/\alpha})$ и выполняется неравенство (3.3). Далее, в силу формулы (5.3) из [2, с. 62], имеем

$$\langle Hu,u\rangle=(Hu,u)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{h}_c(x)\,|\hat{u}(x)|^2dx\quad\forall u\in L_{1+\alpha}(R,\varrho). \tag{3.5}$$

Из (3.5), в силу условия (2.3), вытекает, что H - положительный оператор. Наконец, точно так же как и при доказательстве леммы 2.1 устанавливается, что оператор H является потенциальным и имеют место формулы (3.4).

Теорема 3.1. Пусть $\alpha=r/s\in[1,\infty)$, где $r,s=1,3,5,\ldots$ - нечетные числа, и выполнены условия (2.3) и (3.2). Тогда уравнение (3.1) имеет единственное решение $u^*(x)\in L_{1+\alpha}(R,\varrho)$ при любом $f(x)\in L_{1+1/\alpha}(R,\varrho^{-1/\alpha})$. Если, дополнительно, ядро $h(x)$ является четной функцией и $\alpha\ge 3$ - нечетное число, то это решение может быть найдено методом последовательных приближений по формуле:

$$u_{n+1}=u_n-\delta_n\cdot||Bu_n-f||^{1-1/\alpha}_{1+1/\alpha,-1/\alpha}\cdot\rho^{-\frac{1}{\alpha}}\cdot|Bu_n-f|^{-1+1/\alpha}\cdot[Bu_n-f],$$

где $u_0(x)\in L_{1+\alpha}(R,\varrho)$ - начальное приближение, $Bu=\varrho\cdot u^\alpha+Hu$,

$$\delta_n=\min\left(1,\frac{2}{\varepsilon+\alpha\cdot(||u_n||_{1+\alpha,1}+||Bu_n-f||_{1+1/\alpha,-1/\alpha})^{\alpha-1}+c^2(\varrho)\cdot||h||_1}\right), \tag{2.8}$$

$\varepsilon>0$ - любое число.

Доказательство. Поскольку доказательство проводится по той же схеме, что и в теореме 2.1, то ограничимся приведением лишь основных его моментов. Запишем уравнение (3.1) в операторном виде:

$$Bu=f,\quad\text{где } Bu=\varrho\cdot u^\alpha+Hu. \tag{3.6}$$

Поскольку $\forall u\in L_{1+\alpha}(R,\varrho)$ имеем, что $\varrho\cdot u^\alpha\in L_{1+1/\alpha}(R,\varrho^{-1/\alpha})$, то в силу леммы 3.1 оператор B действует из $L_{1+\alpha}(R,\varrho)$ в $L_{1+1/\alpha}(R,\varrho^{-1/\alpha})$, причем дуализующее отображение J^* для пространства $L_{1+1/\alpha}(R,\varrho^{-1/\alpha})$ имеет вид [ср. 6, с. 28]:

$$J^*w(\cdot)=||w||^{1-1/\alpha}_{1+1/\alpha,-1/\alpha}\cdot\varrho^{-1/\alpha}(\cdot)\cdot|w(\cdot)|^{1/\alpha-1}\cdot w(\cdot). \tag{3.7}$$

Далее, $\forall u,v\in L_{1+\alpha}(R,\varrho)$, имеем

$$||Bu-Bv||_{1+1/\alpha,-1/\alpha}\le||\varrho\cdot(u^\alpha-v^\alpha)||_{1+1/\alpha,-1/\alpha}+||H(u-v)||_{1+1/\alpha,-1/\alpha}=I_1+I_2.$$

Как и при доказательстве теоремы 2.1, получаем

$$I_1 \le \frac{\alpha}{2}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varrho^{1/\alpha}(x)\,|u(x)-v(x)|^{1+1/\alpha}\varrho^{1-1/\alpha}(x)|u^{\alpha-1}(x)+v^{\alpha-1}(x)|^{1+1/\alpha}dx\right)^{\alpha/(\alpha+1)} \le$$

$$\le \frac{\alpha}{2}\,||u-v||_{1+\alpha,1}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varrho(x)\,|u^{\alpha-1}(x)+v^{\alpha-1}(x)|^{(\alpha+1)/(\alpha-1)}dx\right)^{(\alpha-1)/(\alpha+1)} \le$$

$$\le \frac{\alpha}{2}\,||u-v||_{1+\alpha,1}\left(||u||_{1+\alpha,1}^{\alpha-1}+||v||_{1+\alpha,1}^{\alpha-1}\right) \le \alpha\cdot r^{\alpha-1}\cdot ||u-v||_{1+\alpha,1},$$

где $r=\max\left(||u||_{1+\alpha,1},||v||_{1+\alpha,1}\right)$. Таким образом, с учетом (3.3), имеем

$$||Bu-Bv||_{1+1/\alpha,-1/\alpha} \le \mu(r)\cdot||u-v||_{1+\alpha,1}, \tag{3.8}$$

где $\mu(r)=\alpha\cdot r^{\alpha-1}+c^2(\varrho)\,||h||_1$ - возрастающая на R_+ функция. Значит, B - ограниченно липшиц-непрерывный оператор. Наконец, точно так же как и при доказательстве теоремы 2.1, доказывается, что B - равномерно монотонный (с $\beta(s)=2^{1-\alpha}s^{\alpha+1}$) потенциальный оператор.

Замечание 3.1. Используя результаты работы [6], аналогичные результаты можно установить для НИУС вида

$$\varrho(x)\cdot u^{\alpha}(x)+\int\limits_{\Gamma} h(x-t)\,u(t)\,dt=f(x),$$

где $\Gamma=R_+$ или $\Gamma=[-\pi,\pi]$ (в периодическом случае), и систем таких уравнений.

В заключение отметим, что если выполнены условия теоремы 2.1 и, дополнительно, $b(x)>0$ для почти всех $x\in R$, то разделив обе части уравнения (2.1) на $b(x)$ и обозначив $b\cdot u=v$, получим уравнение (3.1), где роль $u(x)$ играет $v(x)$, причем вес $\varrho(x)=b^{-1-\alpha}(x)$ и правая часть $f(x)/b(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 3.1.

Литература

1. *Асхабов С.Н.* Применение метода монотонных операторов к некоторым нелинейным уравнениям типа свертки и сингулярным интегральным уравнениям // Известия ВУЗов. Математика. 1981. №9. С. 64-66.

2. *Askhabov S.N.* Integral equations of convolution type with power nonlinearity // Colloq. Math. 1991. Vol. 62, N1. P. 49-65.

3. *Askhabov S.N., Betilgiriev M.A.* Nonlinear convolution type equations // Seminar Anal. Operat. Equat. and Numer. Anal. 1989/90. Berlin. 1990. P. 1-30.

4. *Вайнберг М.М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М.: Наука, 1972.

5. *Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.:Мир, 1978.

6. *Асхабов С.Н.* Применение метода монотонных операторов к решению нелинейных сингулярных интегральных уравнений и их систем. Дисс. ... канд. физ.-матем. н. Дагест. ун-т. Махачкала, 1981. - 120 с.

7. *Трубников Ю.В., Перов А.И.* Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями. Минск: Наука и техника, 1986.

Approximate solution of nonlinear convolution type equations by gradient method

S. N. Askhabov

By methods of monotone potential operators theory, existence and uniqueness theorems are proved for some classes of nonlinear integral convolution type equations in real Lebesgue spaces.