МОТИВЫ

К. Н. Тынянский

Адыгейская республиканская научная библиотека, г. Майкоп

В статье предлагается новый подход к определению универсальной теории когомологий.

Перенос методов алгебраической топологии в алгебраическую геометрию, точнее поиск для схем аналогов гомотопических и гомологических инвариантов топологических пространств – таково направление. Тут, как хорошо известно, имеется проблема «множества» получаемых теорий когомологий по сравнению с их «единством» в алгебраической топологии. Эту проблему, по замыслу Александра Гротендика – основателя нынешней алгебраической геометрии, призвана решить универсальная теория – мотивы. В контексте переноса, резонно спросить – сталкивалась ли алгебраическая топология с поиском чего-то универсального? Ответ хорошо известен – это универсальные расслоения: требуется найти классифицирующее пространство – базу универсального расслоения при заданном слое. При этом слой задается алгебраически – векторным пространством или ассоциированной с ним группой. Всякая попытка использовать в слое какое-нибудь пространство отличное от векторного обречена, из-за *CokerJ*, т. е. даже для сфер. А, как известно, все прочие, имеющие в слое пространство «сложнее» сферы, экстраординарные теории (кобордизмы) сводятся к сферическому случаю с помощью конструкции спектра, превращая алгебраическую топологию в гомотопическую. Успех ординарных теорий (ко-)гомологий и *K*-теории объясняется именно отсутствием топологии и присутствием «хорошей» алгебры в слое. Иначе говоря, расслоение (или более алгебраически – пучок) – основа для функторов, осуществляющих «интерфейс» между крайними ортодоксиями математики – топологией и алгеброй, есть их «стык» – там, где кончается алгебра – слой, следуя проекции, отображается в точку, начинается топология – база. Единообразная характеризация классифицирующих пространств (как бесконечнократных пространств петель), вот лейтмотив поиска универсальности в поздней алгебраической топологии. Обратную проекции связь базы и слоя доставляет теория представлений: база алгеброизируется фундаментальной группой, а слой-группа топологизируется, становясь группой Ли. Успех теории представлений – следствие этого весьма ограниченного, но все же взаимопроникновения ортодоксий. Напомнив, что в алгебраической топологии само определение топологии фиксировано – задает область определения функторов (категорию *Top*), я возвращаюсь к алгебраической геометрии, область определения которой также зафиксирована – коммутативная алгебра (категория *k-alg*). Надо заметить, что топология, рассматриваемая как категория может быть весьма различной, предопределяя эффективность применения алгебро-топологических функторов. И вот, как бы явно демонстрируя антагонизм ортодоксий, значения алгебро-геометрического функтора *Spec* оказались среди пространств с топологией непригодной для осуществления мечты Вейля о теории когомологий схем – «двунаправленном интерфейсе» ортодоксий. Предложенная Гротендиком модернизация – отказ от фиксации определения топологии, для ее расширения, достаточного для эффективного применения аналогов алгебро-топологических функторов, которые затем и были построены и продолжают строиться во «множестве». Однако расширения, инспирированные топологией Гротендика, относятся не к базе (продукту оснований – множеству *SpecA*, которое есть сознательное ухудшение топологии в угоду алгебре, разумеется) – «вотчине» топологии, а к слою (морфизма определяющего тип топологии) – «вотчине» алгебры. Из этого следует, что сама информация, доставляемая «интерфейсными» функторами (инварианты) не зависит от того, где она размещена – в базе (топологическое пространство) или в слое (схема). Если пространство в обычной топологии очень плохое, но имеется функтор из алгебры (не обязательно коммутативной) со значением в них, то существует такая топология Гротендика или ее модификация, что соответствующий функтор в алгебру (может быть коммутативную) очень хороший? Плохие пространства – «ждущие своего момента агенты» алгебры в топологии? Надо еще сказать, что идея «двунаправленного интерфейса» продвигалась и алгебраической топологией под названием геометрической топологии: действительно, алгебро-топологические функторы (ординарные по своему определению) преимущественно абелевы, напрашивается применение методов коммутативной алгебры (таких как локализация и пополнение) к классифицирующим пространствам и спектрам. Отличие от абелевости, что очевидно из гомотопии, доставляет фундаментальная группа, для его устранения, применительно к K-теории, есть +-конструкция Квиллена. Получается что алгебраическая геометрия это коммутативная алгебра, занимающаяся слоем, что бы было как в алгебраической топологии, а геометрическая топология это алгебраическая топология, которая занимается базой, что бы было как коммутативной алгебре. Однако вернемся к универсальности. Каждому варианту топологии Гротендика соответствует категория – сайт или топос (если определить пучки) и когомологический функтор. Следовательно, для фиксированной схемы (базы) требуется определить универсальную топологию Гротендика (слой) – универсальный сайт, универсальный топос и универсальный когомологический функтор. Вместо «универсальных», «отдавая дань», напрашивается «мотивные». Мотивы (для сравнения классифицирующие пространства), как поиск универсальной топологии Гротендика (определение бесконечнократного пространства петель) – универсального слоя (универсальной базы) при фиксированном определении алгебры (топологии). Традиционный гротендиковский подход превращения, при помощи соответствий, категории $Sch(k)$, (обычно гладких) схем над полем k, в аддитивную категорию $SchCor(k)$, а затем вложение ее, путем формального добавления образов и ядер проекторов, в искомую псевдоабелеву категорию мотивов $M(k)$, ни какой новой топологии не дает. Но, можно ведь изменить стратегию – вначале, при помощи, отвечающих соответствиям, соответствий Галуа между простыми идеалами и мультипликативными системами, для любого объекта X категории $Sch(k)$ вводится топология Зарисского – определяется сайт X_{Zar}, а затем она, при помощи соответствий Галуа между образами и ядрами проекторов, расширяется до *мотивной топологии*, как некоторой топологии Гротендика, с классом морфизмов – *мотивным* (mot): = $\{(X, p) \mid p: X \to X$ – проектор $pp = p\}$, (все (X, p) являются слагаемыми прямой суммы (X, id)), определяющим X_{mot} – *мотивный сайт*, псевдоабелеву категорию с объектами – *мотивами* (X, p) и морфизмами $\mathrm{Hom}((X, p), (X, q))$ – всеми $f = pf = fq$. Таким образом, определение мотивов – это поэтапное введение мотивной топологии, при этом X_{mot} естественно рассматривать как полную подкатегорию абелевой категории X^{+}_{mot} – расширения X_{Zar} до канонического разложения морфизмов. Все остальные конструкции совершенно стандартны, как для любой теории когомологий, – *мотивные пучки* образуют *мотивный топос*, *мотивные комплексы*, *мотивную производную категорию* и, наконец, *мотивные когомологии*. Универсальность очевидна – всякая топология по определению идемпотент (как всякая гомология квадратный нильпотент), взяв в качестве такового проектор, можно, вводя дополнительные условия, «проектировать» различные топологии – реализовывать мотив. Иначе говоря, те разложения схем на «куски» (клетки), которые производят проекторы мотивной топологии, входят во все «правильные» топологии и переносятся в их «геометрические» когомологии (всякая база вкладывается в классифицирующее пространство). Заканчивая, замечу, что на этой «почве» можно дойти до «квантовой механики» – сдвига d в $pp = p - d$, доставляющего «гомотопию» – «плавный переход» от гомологии ($d = p$) к топологии ($d = 0$).

