О СОСУЩЕСТВОВАНИИ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ И ЛИНЕЙНЫХ ЧАСТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ КУБИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ

Д.С. Ушхо, А.Д. Ушхо

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

Доказывается, что наибольшее число линейных частных интегралов, при наличии которых кубическая дифференциальная система имеет предельные циклы, равно 4, и если кубическая система, из траекторий которой состоят четыре прямые, имеет предельный цикл, то он расположен внутри параллелограмма, образованного этими прямыми. Найдены достаточные условия отсутствия предельных циклов в случае четырёх линейных частных интегралов.

Изучению дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt}=\sum_{i+j=0}^{3}a_{ij}x^i y^j \equiv P(x,y),\ \frac{dy}{dt}=\sum_{i+j=0}^{3}b_{ij}x^i y^j \equiv Q(x,y) \tag{1}$$

где $a_{ij}, b_{ij} \in \boldsymbol{R}$, $(P,Q)=1$, обладающей алгебраическим частным интегралом, посвящено достаточно много работ. В каждой из них, как правило, ставится вопрос о существовании предельных циклов.

Так, в работе [1] доказано, что система (1) при условии $P(x,y)\equiv y$ не имеет предельных циклов, сепаратрисы, идущей из седла в то же седло, многоугольника траекторий, состоящего из сепаратрис и особых точек, если (1) обладает предельным циклом

$$y^2-ax^2-bx-c=0\ \ (a<0,\ b^2>ac).$$

Авторами заметок [2,3] построен фазовый портрет системы (1), из траекторий которой состоят гипербола и эллипс. При этом установлено, что эллипс не является предельным циклом. В заметках [4,5] найдены достаточные условия существования предельного цикла системы (1), причем этим циклом является либо овал нераспадающейся кривой третьего порядка, либо окружность. В заметке [6] найдены достаточные условия того, что единственным предельным циклом системы (1) является эллипс, если из её траекторий состоят две параллельные прямые. Авторами работы [7] изучена система (1) при условии, что из её траекторий состоят эллипс и одна или две прямые. Найдены достаточные условия единственности предельного цикла в случае одной прямой и эллипса, приводится пример системы (1), не являющейся моноцикличной, если из её траекторий состоят эллипс и одна прямая. Здесь также доказано, что система (1), имеющая частные интегралы в виде эллипса и двух пересекающихся прямых, не обладает изолированными периодическими решениями.

В работе [8] установлено, что дифференциальное уравнение траекторий системы (1) может иметь любое число интегральных прямых от одного до восьми. Кроме того, проведено полное качественное исследование этого уравнения в случае максимального числа уравнений.

Из известной работы [9] следует, что система (1) не имеет предельных циклов, если из её траекторий состоят пять прямых. Поэтому естественно поставить вопрос: при каком наибольшем числе линейных частных интегралов кубическая система имеет предельные циклы?

Рассмотрим систему (1) в предположении, что она имеет четыре линейных частных интеграла. Тогда возможны следующие случаи взаимного расположения четырёх прямых:

а) все прямые проходят через одну и ту же точку покоя системы (1);

б) одна прямая пересекает остальные три прямые, проходящие через одну и ту же точку покоя системы (1);

в) все прямые попарно пересекаются;

г) две прямые параллельны, остальные две пересекаются и пересекают параллельные прямые;

д) прямые образуют параллелограмм;

e) три прямые параллельны между собой и пересекают четвертую прямую.

Лемма 1. Если дифференциальное уравнение траекторий системы (1) имеет четыре интегральных прямых, проходящих через одну и ту же точку равновесия, то система (1) не имеет предельных циклов.

Доказательство. Согласно работе [10] систему (1) посредством линейного невырожденного преобразования можно привести к системе:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(a_{10} + a_{20}x + a_{11}y + a_{30}x^2 + a_{21}xy + a_{12}y^2), \\ \frac{dy}{dt} &= y(b_{01} + b_{11}x + b_{02}y + b_{21}x^2 + b_{12}xy + b_{03}y^2) \end{aligned} \tag{2}$$

для которой прямые: $l_1 : y - k_1 x = 0,\ l_2 : y - k_2 x = 0$, состоящие из траекторий системы (2), расположены в первом и третьем квадрантах.

Непосредственными вычислениями можно показать, что имеет место равенство:

$$a_{30}x^2 + a_{21}xy + a_{12}y^2 \equiv b_{21}x^2 + b_{12}xy + b_{03}y^2 + A(y - k_1 x)(y - k_2 x) \tag{3}$$

Очевидно, $A \neq 0,$ ибо правые части (2) взаимно просты. В силу того, что l_1 и l_2 состоят из траекторий системы (2), выполнены условия:

$$a_{10} = b_{01}, \quad a_{20} = b_{11}, \quad a_{11} = b_{02} \tag{4}$$

С учётом (3) и (4) перепишем систему (2):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(a_{10} + a_{20}x + a_{11}y + b_{21}x^2 + b_{12}xy + b_{03}y^2 + A(y - k_1 x)(y - k_2 x), \\ \frac{dy}{dt} &= y(a_{10} + a_{20}x + a_{11}y + b_{21}x^2 + b_{12}xy + b_{03}y^2) \end{aligned} \tag{5}$$

Из вида правых частей системы (5) следует, что все состояния равновесия этой системы расположены на осях координат и прямых l_1 и l_2. Таким образом, налицо невозможность существования предельных циклов системы (5). Лемма доказана.

Лемма 2. Если дифференциальное уравнение траекторий системы (1) имеет четыре интегральных прямых, одна из которых пересекает остальные три, проходящие через одну и ту же точку покоя системы (1), то эта система не имеет предельных циклов.

Доказательство. Систему (1) можно привести к виду:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(b_{01} + b_{11}x + b_{02}y + b_{21}x^2 + b_{12}xy + b_{03}y^2 + (y - kx)((a_{12} - b_{03})x + (a_{12} - b_{03})y + a_{11} - b_{02})), \\ \frac{dy}{dt} &= x(b_{01} + b_{11}x + b_{02}y + b_{21}x^2 + b_{12}xy + b_{03}y^2) \end{aligned} \tag{6}$$

При этом выполнены условия: $b_{01} = -b_{02} - b_{03}$; $b_{11} = 2b_{02} + 3b_{03} - b_{12} - a_{11} - a_{12}$; $b_{21} = b_{12} - 2b_{03} - b_{02}k - b_{02} + a_{11}k + a_{11} + a_{12} - b_{03}k + a_{12}k$; и прямые: $l_3 : y + x - 1 = 0,\ l_4 : y - kx = 0$, $k > 0$, состоят из траекторий системы (6).

Опуская громоздкие вычисления, укажем, что имеет место равенство

$$(PD)'_x + (QD)'_y = -\frac{b_{02} + b_{03}}{xy(y - kx)}, \tag{7}$$

где $D(x, y) = (xy(y + x - 1)(y - kx))^{-1}$, P и $Q -$ правые части первого и второго уравнений, соответственно, системы (6).

Из (7) следует, что при $b_{02}+b_{03}=0$ система (6) имеет особые точки только типа седла и центра в областях возможного расположения замкнутых траекторий, а при $b_{02}+b_{03}\neq 0$ согласно критерию Дюлака [11] замкнутых траекторий система не имеет. Лемма доказана.

Лемма 3. Если дифференциальное уравнение траекторий системы (1) имеет четыре интегральных прямых, которые попарно пересекаются, то эта система не имеет изолированных периодических решений.

Доказательство. Не уменьшая общности рассуждений, рассматриваем систему (2), для которой прямые: $l_5: y-k_1x-1=0, l_6: y-k_2x+k_2=0$, где $k_1<-1,\ -1<k_2<0$, являются частными интегралами.

Система (2) имеет в качестве частных интегралов прямые: l_5 и l_6 в том и только в том случае, когда она имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=x((b_{21}+k_1k_2(a_{12}-b_{03}))x^2+(b_{12}-(k_1+k_2)(a_{12}-b_{03}))xy+a_{12}y^2+\frac{1-k_1}{k_1}(b_{21}+\\&+\ k_1k_2(a_{12}-b_{03}))x+a_{11}y-\frac{1}{k_1}(b_{21}+k_1k_2(a_{12}-b_{03})))\equiv P_3(x,y),\\\frac{dy}{dt}&=y(b_{21}x^2+b_{12}xy+b_{03}y^2+(k_1(a_{12}-b_{03}+a_{11}-a_{12}k_2)-b_{21}-b_{12})x+b_{03}(k_2-1)y-\\&-b_{03}k_2)\equiv Q_3(x,y)\end{aligned}\tag{8}$$

и при этом коэффициенты (8) удовлетворяют условию:

$$k_2(b_{12}+b_{03}k_2-a_{12}k_2+a_{12}k_1+a_{11}+a_{12})+k_1(b_{03}-a_{12}-a_{11}+\frac{b_{21}}{k_1^2})+b_{21}+b_{12}=0 \tag{9}$$

Вычисления показывают, что

$$(P_3D)'_x+(Q_3D)'_y\equiv 0\ ,\ \text{где}\ D(x,y)=(xy(y-k_1x-1)(y-k_2x+k_2))^{-1}.$$

Следовательно, система (8) не может иметь изолированных периодических решений. Лемма доказана.

Лемма 4. Если дифференциальное уравнение траекторий системы (1) имеет четыре интегральных прямых, две из которых пересекаются и пересекают каждую из двух параллельных прямых, то эта система не имеет предельных циклов.

Доказательство. В рассматриваемом случае систему (1) можно привести к виду:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=x(\frac{a_{30}}{k}(kx+b_1)(kx+b_2)+a_{21}xy+a_{12}y^2+a_{11}y)\equiv\overline{P}_3(x,y),\\\frac{dy}{dt}&=y((2a_{30}+a_{21}k+b_{03}k^2)x^2+k(a_{12}-2b_{03}-\frac{a_{30}}{k^2})xy+k(a_{11}+(b_1+b_2)(b_{03}+\frac{a_{30}}{k^2}))x+\\&+b_{03}(y-b_1)(y-b_2))\equiv\overline{Q}_3(x,y)\end{aligned}\tag{10}$$

где прямые : $y-kx-b_1=0$ и $y-kx-b_2=0$ ($k<0,\quad b_1\neq b_2$), состоят из траекторий системы (10).

Вычисления показывают, что

$$(\overline{P}_3D)'_x+(\overline{Q}_3D)'_y=\frac{a_{30}+a_{21}k+a_{12}k^2}{k(y-kx-b_1)(y-kx-b_2)}. \tag{11}$$

Здесь $D(x,y)=(xy(y-kx-b_1)(y-kx-b_2))^{-1}$.

Если $a_{30}+a_{21}k+a_{12}k^2=0$, то система (10) консервативна, и изолированных периодических решений она не имеет. Если $a_{30}+a_{21}k+a_{12}k^2\neq 0$, то согласно критерию Дюлака [11] система (10) также не имеет предельных циклов. Лемма доказана.

Лемма 5. Если дифференциальное уравнение траекторий системы (1) имеет четыре интегральных прямых, три из которых параллельны между собой и пересекают четвертую прямую, то эта система не имеет предельных циклов.

В самом деле, три параллельных прямых посредством линейного невырожденного преобразования [10] можно перевести в одну из главных изоклин, например, в изоклину бесконечности. Следовательно, все состояния равновесия системы принадлежат трем указанным прямым, и налицо невозможность существования у такой системы предельных циклов.

Из лемм 1-5 следует

Теорема 1. Если дифференциальное уравнение траекторий системы (1) имеет четыре интегральных прямых, из которых три параллельны между собой или хотя бы три попарно пересекаются, то эта система не имеет предельных циклов.

В случае, когда дифференциальное уравнение траекторий системы (1) имеет четыре интегральных прямых, образующих параллелограмм, систему (1) можно привести к виду:

$$\frac{dx}{dt} = x(x-1)(Ax+By+C) \equiv F(x,y),\ \frac{dy}{dt} = y(y-1)(Mx+Ny+K) \equiv G(x,y) \qquad (12)$$

Теорема 2. Система (12) не имеет предельных циклов, если выполняется хотя бы одно из условий: 1) $AN = 0$; 2) $AN > 0$; 3) $C = K = 0$; 4) $CK \neq 0$.

Доказательство. В случае 3 все состояния равновесия системы (12) расположены на интегральных прямых, поэтому она не имеет предельных циклов. Если имеет место случай 4, то каждая из главных изоклин: $L_1:\ Ax+By+C=0$ и $L_2:\ Mx+Ny+K=0$ при условии $ABMN \neq 0$ проходит через одну из вершин квадрата q, образованного прямыми: $x=0;\ y=0;\ x=1;\ y=1$. При этом изоклины L_1 и L_2 проходят либо через одну и ту же вершину, либо через разные вершины q, но тогда эти прямые параллельны. Поэтому система (12) и в этом случае не имеет особых точек, не лежащих на интегральных прямых.

В случае 4 выполняется неравенство $BM \neq 0$, ибо в противном случае система имела бы пять линейных частных интегралов.

Для доказательства справедливости теоремы в случаях 1 и 2 воспользуемся критерием Дюлака [11]. Пусть $D(x,y) = (xy(x-1)(y-1))^{-1}$. Тогда имеет место равенство:

$$(FD)'_x + (GD)'_y = \frac{A(x-0,5)^2 + N(y-0,5)^2 - 0,25(A+N)}{xy(x-1)(y-1)}. \qquad (13)$$

Если $A = N = 0$, то выражение (13) тождественно равно нулю, следовательно, система (12) не имеет изолированных периодических решений. Если $A = 0 \wedge N \neq 0$ или $A \neq 0 \wedge N = 0$, то выражение (13) знакопостоянно в областях возможного расположения предельных циклов, и согласно критерию Дюлака [11] циклы отсутствуют. Тем самым теорема доказана в случае 1. Если имеет место случай 2, то согласно критерию Дюлака [11] предельные циклы пересекают эллипс $L: A(x-0,5)^2 + N(y-0,5)^2 - 0,25(A+N) = 0.$ Но L проходит через вершины квадрата q, и предельные циклы должны быть расположены вне q. Выше нами доказано, что система (12) не имеет особых точек, расположенных вне квадрата q и не лежащих на интегральных прямых дифференциального уравнения траекторий системы (12). Теорема доказана полностью.

Из рассуждений, проведённых при доказательстве теоремы 2, следует

Теорема 3. Пусть система (1), из траекторий которой состоят четыре прямых, образующих параллелограмм, имеет предельный цикл. Тогда этот цикл непременно расположен внутри указанного параллелограмма.

Покажем, что в классе кубических дифференциальных систем (1) с четырьмя линейными частными интегралами существуют системы, имеющие предельные циклы. Для этого рассмотрим дифференциальную систему:

$$\frac{dx}{dt} = 2(1-4x^2)((3+2\mu)x-8y),\ \frac{dy}{dt} = (3+8y-16y^2)(3x-2y). \qquad (14_\mu)$$

Легко видеть, что $\forall \mu \in \mathbf{R}$ система (14_μ) имеет четыре частных интеграла: $x-0{,}5=0;\ x+0{,}5=0;\ y+0{,}25=0;\ y-0{,}75=0$. Начало координат системы (14_0) является однократным негрубым, устойчивым фокусом [12], так как $\alpha_3(0{,}0)=-\dfrac{1}{4\sqrt{3}}<0.$ Согласно теории бифуркаций [12] система (14_μ) имеет устойчивый предельный цикл, окружающий неустойчивый грубый фокус $(0{,}0)$, если $\mu -$ сколь угодно малое положительное число.

Из приведённого выше примера и работы [9] непосредственно вытекает

Теорема 4. Если $E_m -$ класс кубических систем (1) с m линейными частными интегралами, допускающих изолированные периодические решения, то $m \le 4$.

Литература

1. *Долов М.В.* Об алгебраических предельных циклах одного дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения, 1966.- Т.11, №11.- С. 1469 - 1473.
2. *Белевец П.С, Валеева Р.Т.* Об одном классе динамических систем с двумя частными алгебраическими интегралами // Волжский матем. сб.,1973.- Вып. 16.- С. 52 – 54.
3. *Белевец П.С., Валеева Р.Т.* Качественная картина в целом одного класса динамических систем // Волжский матем. сб., 1973.- Вып. 16.- С. 55 – 60.
4. *Ушхо Д.С, Чайка И.В.* О предельных циклах одной автономной системы с алгебраическими правыми частями // Дифференциальные уравнения, 1991.- Т. 27, №3.- С. 544 - 546.
5. *Ушхо Д.С.* Предельные циклы одной автономной системы с алгебраическими правыми частями // Дифференциальные уравнения, 1991. – Т. 27, №11. – С. 1915 – 1925.
6. *Столяров В.В.* О предельных циклах и ограниченности одной динамической системы // Дифференциальные уравнения, 1989. – Т. 25, №10. – С. 1823 – 1824.
7. *Ушхо Д.С., Тешев Р.М.* Предельные циклы одной кубической дифференциальной системы // Вестник Адыгейского гос. ун – та. – Майкоп: Изд – во АГУ, 2002. – Вып. 3 – 4(7 - 8). - С. 139 – 143.
8. *Любимова Р.А.* Об одном дифференциальном уравнении с интегральными прямыми // Дифференциальные и интегральные уравнения. – Горький: Изд – во гос. ун – та, 1977. – Вып. 1. – С. 19 – 22.
9. *Горбузов В.Н., Тыщенко В.Ю.* Частные интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Математический сборник, 1992. – Т. 183, №3. – С. 76 – 94.
10. *Ушхо Д.С.* О прямых изоклинах кубической дифференциальной системы // Современные проблемы математики и информатики: Сборник научных трудов. – Армавир: Редакционно-издательский центр АГПУ, 2004.- Вып.1.- С. 41-43.
11. *Баутин Н.Н. Леонтович Е.А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. – М.: Наука, 1976. – 496с.
12. *Андронов А.А.* Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. – М.: Наука, 1967. – 488с.

About existing of limiting cycles and line particular integrals of cubic differential systems on plane

D.S. Ushkho, A. D. Ushkho

The authors proved that the maximum quantity of line particular integrals equal four when the three dimension differential system haven the limiting cycle. If the three dimension differential system haven the limiting cycle and four straight lines as trajectories, then one located inside parallelogram from these straight lines. The sufficient conditions of absence limiting cycles in case four line particular integrals are obtained.

