Эффект Ааронова-Бома в синхротронном излучении.

В.Г. Багров, Д.М. Гитман, В.Б. Тлячев

11 марта 2000

1 Введение

В работе [1] были получены точные решения уравнений Дирака и Кляйна-Гордона для заряда, движущегося в однородном магнитном поле в комбинации с полем Ааронова-Бома (фактически эти решения уже были приведены в [2] (см. стр. 110), однако их особенности там не обсуждались). Эти решения могут служить базой построения квантовой теории излучения частиц в таком поле, что и является предметом настоящей работы. Мы будем использовать здесь результаты работы [1]. При ссылках на формулы этой работы мы будем к номеру формулы добавлять римскую цифру I.

В [1] уже отмечалось, что классические траектории частицы не зависят от наличия поля соленоида (если они не проходят через начало координат, что мы считаем выполненным). Поэтому с позиций классической теории спонтанное излучение заряда, движущегося в рассматриваемом поле, является синхротронным излучением и классическая теория такого излучения хорошо разработана [3].

Мы хотим рассмотреть излучение заряда, движущегося в рассматриваемом поле, методами квантовой теории, где влияние поля соленоида должно проявляться и характеристики излучения должны отличаться от соответствующих характеристик синхротронного излучения, также рассчитанных по квантовой теории и хорошо известных [4]. Возникающие различия уместно называть проявлениями эффекта Ааронова-Бома в синхротронном излучении.

2 Вычисление матричных элементов и анализ излучаемых частот

Рассмотрим спонтанное излучение бесспиновой частицы (квантовая теория синхротронного излучения для этого случая построена в работах [5, 6, 7, 8]). Характеристики излучения известным образом выражаются через матричные элементы оператора

$$\exp[-i\,(\vec{æ}\vec{r})]\vec{P}, \tag{1}$$

где $\vec{P}$ – оператор кинетического импульса (I.2.1), а волновой вектор фотона $\vec{æ}$ зададим в декартовых координатах в следующем виде

$$\vec{æ} = æ\,(\sin\theta\cos\varphi', \sin\theta\sin\varphi', \cos\theta)\,. \tag{2}$$

Сферические углы θ, φ' характеризуют направление вылета фотона (угловое распределение излучения), а величина $æ$ определяет энергию (спектр) фотона $\mathrm{E}_{ф}$

$$\mathrm{E}_{ф} = c\hbar æ. \tag{3}$$

Поляризацию излучения будем определять, как это принято в теории синхротронного излучения (подробное изложение дано в [3, 4]). Для этого следует построить σ и π-компоненты оператора импульса

$$\begin{gathered} P_\sigma = -P_x \sin\varphi' + P_y \cos\varphi', \\ P_\pi = (P_x \cos\varphi' + P_y \sin\varphi') \cos\theta - P_z \sin\theta. \end{gathered} \tag{4}$$

Используя операторные соотношения (I.1.19), несложно получить запись (4) через операторы a_1, a_1^+

$$\begin{gathered} P_\sigma = i\hbar\sqrt{\tfrac{\gamma}{2}}\left(a_1 e^{i\varphi'} - a_1^+ e^{-i\varphi'}\right), \\ P_\pi = \hbar\sqrt{\tfrac{\gamma}{2}}\left(a_1 e^{i\varphi'} + a_1^+ e^{-i\varphi'}\right)\cos\theta - P_z \sin\theta. \end{gathered} \tag{5}$$

Вычисление матричных элементов операторов (5) в обкладках начального $\psi^{(j)}_{n,l,k_3}$ и конечного $\psi^{(j')}_{n',l',k'_3}$ состояний (квантовые числа конечных состояний отмечаем штрихами) удается провести точно.

Отметим некоторые технические особенности вычислений. Запись (5) удобна тем, что можно воспользоваться формулами (I.2.14). Интегрирование по углу φ приводит, как и в теории синхротронного излучения (см. [4], стр. 81) к функциям Бесселя. При дальнейшем интегрировании по ρ в теории синхротронного излучения возникали интегралы типа (I.4.60), однако теперь появляются также интегралы типа (I.4.57), не возникавшие ранее. Это связано с тем, что для функций Лагерра не выполняется в нашем случае условие (I.4.22), которое всегда справедливо в теории синхротронного излучения. Матричные элементы не содержат величины l_0 и зависят только от мантиссы магнитного потока μ. Тем самым абсолютная величина потока Φ никак не сказывается на характеристиках излучения и существенна лишь мантисса магнитного потока.

Как и в теории синхротронного излучения, возникают два закона сохранения: закон сохранения z-компоненты, импульса

$$k_3 - k'_3 = æ\cos\theta, \tag{6}$$

и закон сохранения энергии

$$K_j - K'_{j'} = æ. \tag{7}$$

Соотношения (6) и (7) совместно с (I.2.4),(I.2.6), либо (I.3.12) определяют частоту излучения æ как функцию начальных и конечных квантовых чисел и угла вылета θ (в силу симметрии задачи æ не зависит от φ'). Если ввести, как в теории синхротронного излучения, номер излучаемой гармоники ν

$$\nu = n - n', \tag{8}$$

то при $\mu = 0$ частота излучения æ является функцией главного квантового числа n, номера гармоники ν и угла θ (см. [4], стр. 84) и не зависит от начальных и конечных орбитальных квантовых чисел l и l'.

При $\mu > 0$ вырождение частоты по числам l и l' частично снимается, æ начинает зависеть от типа начального и конечного состояний $æ = æ_{jj'}$ в соответствии с (7). Если ввести эффективный номер гармоники $\bar\nu = \bar\nu_{jj'} = \bar n - \bar n'$, $\bar n = n + \mu(2 - j)$

$$\bar\nu = \bar n - \bar n' = \nu + \mu(j' - j) = \begin{cases} \nu, & j = j', \\ \nu + \mu, & j = 1,\ j' = 2,\ \bar\nu > 0, \\ \nu - \mu, & j = 2,\ j' = 1, \end{cases} \tag{9}$$

то несложно получить для бесспиновой частицы

$$æ_{jj'} = \frac{K_j}{\sin^2\theta}\left(1 - \sqrt{1 - \beta_j^2 \frac{2\bar\nu}{2\bar n + 1}\sin^2\theta}\right). \tag{10}$$

Аналогичная формула для дираковской частицы

$$æ_{jj'} = \frac{K_j}{\sin^2\theta}\left(1 - \sqrt{1 - \beta_j^2 \frac{\bar\nu}{\bar n}\sin^2\theta}\right). \tag{11}$$

отличается от (10) заменой $\bar{n} \to \bar{n} - 1/2$, что очевидно из сравнения (I.2.4),(I.2.6) и (I.3.12). Здесь β_j^2 классическая величина

$$\beta_j^2 = 1 - \left(\frac{m}{K_j}\right)^2 = 1 - \left(\frac{m_0 c^2}{E_j}\right)^2 \tag{12}$$

При получении (10) и (11) и далее впредь мы полагаем в начальном состоянии $k_3 = 0$. Выражения для æ можно записать в других эквивалентных формах, например

$$æ_{jj'} = \frac{2\gamma\bar{\nu}}{K_j + \sqrt{K_j^2 - 2\gamma\bar{\nu}\sin^2\theta}}. \tag{13}$$

Введем безразмерную переменную $q = q_{jj'}$

$$q = \frac{æ^2 \sin^2\theta}{2\gamma}, \quad 0 \le q < \bar{\nu}. \tag{14}$$

Несложно получить выражения

$$æ = \frac{\gamma}{K_j}\left(\bar{\nu} + q\right); \quad \sin\theta = \sqrt{\frac{2}{\gamma}} K_j \frac{\sqrt{q}}{\bar{\nu} + q}; \quad \sqrt{K_j^2 - 2\gamma\bar{\nu}\sin^2\theta} = K_j \frac{\bar{\nu} - q}{\bar{\nu} + q}. \tag{15}$$

Выражения (13)-(15) формально сохраняют свой вид и для дираковской частицы.

Таким образом, при заданном типе начального состояния при $\mu > 0$ возникают две спектральные серии – одна при переходах в состояния того же типа (при этом $\bar{\nu} = \nu$), и другая при переходах с изменением типа состояния $(\bar{\nu} = \nu \pm \mu)$, когда номер эффективной гармоники становится нецелым, его дробная часть определяется мантиссой μ . Если зафиксировать $\nu > 0$ и главное квантовое число состояния n , то можно получить следующие строгие при $\mu > 0$ неравенства

$$æ_{21} < æ_{11} < æ_{22} < æ_{12} \tag{16}$$

переходящие в равенства при $\mu = 0$. Разница между частотами $æ_{11}$ и $æ_{22}$ при полях $H \ll H_0$ (что практически всегда справедливо), где H_0 – швингеровское поле

$$H_0 = \frac{m_0^2 c^3}{e\hbar} \approx 4,41 \cdot 10^{13} \text{ гаусс} \tag{17}$$

имеет порядок

$$æ_{22} - æ_{11} \approx æ_{22}\delta\mu, \ \delta = \frac{\gamma}{K_1^2} = \frac{\gamma}{m^2} \cdot \frac{m^2}{K_1^2} = \frac{H}{H_0}\left(\frac{m_0 c^2}{E_1}\right)^2 \tag{18}$$

При типичных полях в ускорителе $H \sim 10^4$ гаусс и не слишком больших энергиях электронов $\delta < 10^{-9}$, и это различие несущественно. Разница же между частотами $æ_{12}$ и $æ_{21}$ в этих же предположениях имеет вид

$$æ_{12} - æ_{21} \approx 2æ_{12}\frac{\mu}{\nu} = 2\frac{\omega}{c}\mu, \tag{19}$$

где ω – классическая синхротронная частота (I.1.7) и при наблюдении гармоник с небольшими номерами становится весьма заметной.

Чрезвычайно важной особенностью при $\mu > 0$ является возможность излучения гармоники $\nu = 0$ при переходе $1 \to 2(j = 1, \ j' = 2)$. В синхротронном излучении такая гармоника не излучается. Для полей $H \ll H_0$ частота излучения на этой гармонике имеет вид

$$\omega_{12} = \omega\mu = \frac{ecH}{E_1}\mu, \tag{20}$$

где ω – синхротронная частота (I.1.7). Соответственно, в переходе $2 \to 1(j = 2, \ j' = 1)$ при $\nu = 1$ излучается частота

$$\omega_{12} = \omega(1 - \mu). \tag{21}$$

Обе эти частоты меньше синхротронной ω. В обычном синхротронном излучении $(\mu = 0)$ в спектре не могут присутствовать частоты, меньшие синхротронной частоты ω, тогда как в рассматриваемом случае такие частоты есть и они обусловлены исключительно ненулевой мантиссой магнитного потока. Это одно из наиболее ярких проявлений эффекта Ааронова-Бома в синхротронном излучении.

3 Точные выражения для мощности излучения бесспиновой частицы

Как уже отмечалось, матричные элементы операторов (5) могут быть вычислены точно. Тем самым можно получить точные выражения для вероятности и мощности однофотонного излучения. Используя соотношения (I.4.11)-(I.4.14), мощность излучения с учетом его поляризации может быть записана в следующем виде

$$W_j = W_0 \frac{H}{H_0} \left(\frac{\gamma}{K_j^2} \right)^2 \sum_{\nu, i'} \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \frac{(\bar{\nu}+q)^3}{\bar{\nu}-q} Q_{jj'} \left| F_{jj'} \right|^2 . \tag{22}$$

Здесь введены следующие обозначения. Величина W_0 постоянная, имеющая размерность мощности

$$W_0 = e^2 \frac{m_0^2 c^3}{\hbar^2} . \tag{23}$$

Для $F_{jj'}$ имеем

$$F_{jj'} = 2l_2 \sqrt{q} I'_{jj'}(q) + l_3 \mathrm{ctg}\theta \sqrt{\frac{2K_j^2}{\gamma}} I_{jj'}(q), \quad I_{1j'}(q) = I_{\bar{n},\bar{n}'}(q), \quad I_{2j'}(q) = I_{\bar{n}',\bar{n}}(q). \tag{24}$$

$F_{jj'}$ не зависит от орбитального квантового числа l, определяется только главным квантовым числом $\bar{n}$, эффективной гармоникой $\bar{\nu}$, типом перехода (j, j') и поляризацией излучения. Поляризацию излучения задают величины l_2 и l_3 (см. [4]): полагая $l_2 = 1$, $l_3 = 0$, получаем σ-компоненту линейной поляризации; при $l_2 = 0$, $l_3 = 1$ имеем π-компоненту линейной поляризации; при $l_2 = l_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ – правую круговую, а при $l_2 = -l_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ – левую круговую поляризации; наконец, при $l_2^2 = l_3^2 = 1$, $l_2 \cdot l_3 = 0$ получаем полную мощность неполяризованного излучения.

Величина $Q_{jj'}$, зависит от начального орбитального числа l и связана с суммированием по конечным орбитальным квантовым числам l'

$$Q_{1j'} = \sum_{l'} I^2_{\bar{n}'-\bar{l}',\bar{n}-\bar{l}}(q), \quad Q_{2j'} = \sum_{l'} I^2_{\bar{n}-\bar{l},\bar{n}'-\bar{l}'}(q), \quad \bar{l} = l + \mu. \tag{25}$$

Суммирование по l' при $j' = 1$ производится в пределах $0 \le l' \le n - \nu$, при $j' = 2$ в пределах $-\infty < l' \le -1$.

Таким образом видим, что если, например, в формулах (24) и (25) при $j = 1$ имеется определенное расположение индексов у функций Лагерра, то при $j = 2$ все изменения сводятся к перестановке (взаимной смене мест) этих индексов. Следует отметить, что это простое правило соблюдается только если запись ведется через эффективные квантовые числа $\bar{n}$, $\bar{l}$, $\bar{n}'$, $\bar{l}'$. Если бы запись велась через n, l, n', l', то соответствующая симметрия выглядела бы намного сложнее (ее формулировка конечно возможна, но выглядит гораздо более громоздкой).

Подинтегральные выражения не зависят от угла φ' и в (22) по φ' можно проинтегрировать, что формально будет соответствовать замене в (22)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' = 1, \tag{26}$$

что мы впредь будем подразумевать.

При интегрировании по θ суммарная круговая поляризация отсутствует. Связано это с тем, что преимущественная круговая поляризация, имеющая место в верхней полуплоскости $\left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$, точно компенсируется преимущественной круговой поляризацией другого знака в нижней полуплоскости $\left(\frac{\pi}{2} \le 0 \le \pi\right)$. Если мы не будем интересоваться круговой поляризацией, то всегда можно полагать в (22) $l_2 \cdot l_3 = 0$ и

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta \to \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta = \int\limits_0^1 dx, \quad x = \cos\theta. \tag{27}$$

4 Суммирование по конечным орбитальным квантовым числам

Если $\mu = 0$, то $|F|^2$ в (22) перестает зависеть от типа конечного состояния j' ввиду выполнения в этом случае свойства (I.4.22) для функций Лагерра. Эффективные квантовые числа при $\mu = 0$ совпадают с обычными $\bar{n} = n$, $\bar{l} = l$ и с учетом (I.4.22) из (25) найдем, учитывая (I.4.118)

$$\sum_{j'} Q_{jj'} = \sum_{k=0}^{\infty} I_{k,s}^2(q) = 1, \quad s = n - l, \tag{28}$$

что известно в теории синхротронного излучения [4]. Иными словами, при $\mu = 0$ исчезает зависимость мощности излучения от начального орбитального квантового числа l. В нашем же случае не равной нулю мантиссы μ величина $Q_{jj'}$ весьма сложно зависит от начального квантового числа l и чисел n, ν. Вырождение мощности излучения по l снимается полностью. Физически этот результат понятен: l характеризует, согласно (I.1.17), минимальное расстояние между классической траекторией и соленоидом, и мощность излучения зависит как от величины этого расстояния, так и того, находится ли соленоид внутри орбиты частицы или снаружи (знак l – тип состояния). В отсутствии соленоида начало координат ничем не выделено и зависимость от l естественным образом исчезает.

Суммирование по l' в (25) можно выполнить точно. Используя формулы (I.4.11)-(I.4.14), можно получить следующее выражение для производной $Q_{jj'}(q)$

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dq}Q_{jj'}(q) = (-1)^{1+j+j'}\sqrt{\tfrac{k+1}{q}}\,&[(2-j)I_{k+1,s}(q)I_{k,a}(q)+ \\ &+(j-1)I_{s,k+1}(q)I_{s,k}(q)], \quad k = \bar{n}' - \mu, \quad s = \bar{n} - \bar{l}.\end{aligned} \tag{29}$$

Отсюда, учитывая поведение $Q_{jj'}$ при $q = 0, \infty$, найдем

$$\begin{aligned}Q_{jj'} = j' - 1 + (-1)^{j'-1}\Bigg[&(2-j)\int\limits_q^{\infty}\sqrt{\tfrac{k+1}{y}}I_{k+1,s}(y)I_{k,s}(y)dy+ \\ &+(j-1)\int\limits_0^{q}\sqrt{\tfrac{k+1}{y}}I_{s,k+1}(y)I_{s,k}(y)dy\Bigg].\end{aligned} \tag{30}$$

Из (30) снова видим, что при $\mu = 0$ (когда зависимость эффективных квантовых чисел от j' исчезает и (I.4.22) выполняется), воспроизводится результат (28).

Выражения (22), (24) и (30) достаточно сложные и пока не найден метод точного интегрирования этих выражений по углу θ и суммирования по гармоникам ν. В теории синхротронного излучения был разработан метод аппроксимации функций Лагерра функциями Макдональда $K_{1/3}$ и $K_{2/3}$ (см. [4]), позволивший проанализировать спектрально-угловое распределение синхротронного излучения в ультрарелятивистском случае. К сожалению, напрямую этот метод при

$\mu > 0$ неприменим. Дело в том, что аппроксимация $I_{n,m}(q)$ через функцию $K_{1/3}$ справедлива лишь при целом индексе m. Если m – нецелое (что у нас имеет место), то следует в аппроксимации использовать функцию $I_{1/3}$ (что можно сделать!), но тогда при больших ν (формально при $\nu \to \infty$, что в синхротронном излучении не приводило к недоразумениям ввиду быстрого убывания $K_{1/3}$ в этом пределе), соответствующие интегралы начинают расходиться и эти аппроксимации неприменимы.

5 Анализ мощности излучения в приближении слабого магнитного поля

Сравнительно просто анализируется случай слабого магнитного поля. Считаем $H \ll H_0$, что в современных лабораторных условиях заведомо выполняется. Считаем также справедливым условие

$$2\gamma\bar{\nu}K_j^{-2} = 2\frac{H}{H_0}\left(\frac{m_0c^2}{E_j}\right)^2 \bar{\nu} \ll 1. \tag{31}$$

Поскольку эффективно излучаемая в релятивистском случае гармоника $\bar{\nu} \sim \left(\frac{E_j}{m_0c^2}\right)^3$, то имеем

$$2\frac{H}{H_0}\frac{E_j}{m_0c^2} \ll 1, \tag{32}$$

что (как известно [4]) означает малость квантовых поправок в релятивистском случае (но не в нерелятивистском приближении (!), ибо в нерелятивистском приближении эффективно излучается гармоника $\bar{\nu} \sim 1$ и (31) выполнено, если $H \ll H_0$). Практически условие (32) также всегда выполняется. В этих предположениях для величины q (14) найдем

$$q = \frac{1}{2}\frac{H}{H_0}\left(\frac{m_0c^2}{E_j}\right)^2 \bar{\nu}^2 \sin^2\theta. \tag{33}$$

Если номера излучаемых гармоник невелики, то можно считать

$$q \ll 1. \tag{34}$$

Именно критерий (34) мы будем считать выполненным и именно этот случай будем рассматривать как приближение слабого поля. В ультрарелятивистском случае, когда $\nu \sim \left(\frac{E_j}{m_0c^2}\right)^3$, для q надем

$$q \sim \frac{H}{H_0}\left(\frac{E_\mathrm{j}}{m_0c^2}\right)^4$$

и q может быть не мало. Этот случай в данной части работы не рассматривается.

Мощность излучения при $q \ll 1$ представим в виде

$$W_j = W_j^{cl}\overline{W}_j, \quad W_j^{cl} = \frac{2}{3}\frac{e^4H^2\beta_j^2\left(1-\beta_j^2\right)}{m_0^2c^3}, \tag{35}$$

$$\overline{W}_j = \sum_{j'}\overline{W}_{jj'}, \quad \overline{W}_{jj'} = \frac{3}{4(2\bar{n}+1)}\int\limits_0^\pi \sin\theta d\theta S_{jj'}^2 \sum_\nu \bar{\nu}^2 R_{jj'} \tag{36}$$

$$S_{11} = S_{22} = S_{12} = l_2 + l_3\cos\theta = S, \quad S_{21} = l_2 - l_3\cos\theta = \overline{S}. \tag{37}$$

Здесь выделена величина W_j^{cl}, представляющая собой мощность излучения на первой гармонике в квазирелятивистском случае (см. [3]).Поляризация излучения характеризуется фактором

$S_{jj'}$.Его особенность состоит в том, что для перехода $2 \to 1$ знак круговой поляризации противоположен знаку круговой поляризации в остальных случаях. Это может быть способом идентификации той части излучения, которая связана с этим переходом. Величины $R_{jj'}$ вычисляются из точных выражений (22), (24) и (30) в разложении по малой величине q с учетом первых отличных от нуля членов. Такое вычисление приводит к следующим результатам.

Для перехода $1 \to 1$ найдем

$$R_{11} = \frac{\Gamma(n+\mu+1)q^{\nu-1}}{\Gamma(n+\mu+1-\nu)\Gamma^2(\nu)}, \quad 1 \le \nu \le l,$$
$$R_{11} = \frac{\Gamma(n-l+1)\Gamma(n+\mu+1)q^{2\nu-l-1}}{\Gamma(n-\nu+1)(n-\nu+\mu+1)\Gamma^2(\nu-l+1)\Gamma^2(\nu)}, \quad l \le \nu \le n. \tag{38}$$

Отсюда видим, что эффективно излучается гармоника $\nu = 1$ и при этом для $1 \le l \le n$ мощность излучения не зависит от l . Для величины $\overline{W}_{11}$ легко получить

$$\overline{W}_{11} = \frac{2(n+\mu)}{2(n+\mu)+1}\overline{S^2}, \quad \overline{S^2} = \frac{3}{4}l_2^2 + \frac{1}{4}l_3^2 \tag{39}$$

Мы видим, что излучение поляризовано так, как это имеет место в синхротронном излучении [4] в нерелятивистском случае. С изменением n величина $\overline{W}_{11}$ слабо возрастает,

$$\lim_{n\to\infty} \overline{W}_{11} = \overline{S^2}. \tag{40}$$

Состояние $l = 0$ здесь выделено в том смысле, что переход из этого состояния подавлен (происходит в следующем порядке по q). Для $\overline{W}_{11}$ при $l = 0$ найдем при $\nu = 1$

$$\overline{W}_{11} = \frac{H}{H_0}\left(\frac{m_0c^2}{E_1}\right)^2 \frac{3n(n+\mu)}{5(2n+2\mu+1)}\left(\frac{5}{6}l_2^2 + \frac{1}{6}l_3^2\right). \tag{41}$$

Мы видим, что излучение в этом случае обладает заметно более высокой степенью линейной поляризации, чем (39), хотя сама излучаемая мощность мала.

Для переходов $2 \to 2$ получаем

$$R_{22} = \frac{\Gamma(n+1)q^{\nu-1}}{\Gamma(n+1-\nu)\Gamma^2(\nu)}. \tag{42}$$

И здесь, как и в предыдущем случае, мы видим, что излучение вырождено по квантовому числу $l < 0$ (снятие вырождения происходит в следующих порядках по q), эффективно излучается только первая гармоника, для которой

$$R_{22} = n$$

и для $\overline{W}_{22}$ найдем

$$\overline{W}_{22} = \frac{2n}{2n+1}\overline{S^2}, \tag{43}$$

что можно получить из (39) при $\mu = 0$ (физически это очевидно).

Для переходов $2 \to 1$ имеем

$$R_{21} = \frac{\Gamma(n+|l|+1-\mu)\Gamma(n-\nu+1+\mu)\Gamma^2(1+\nu-\mu)\mu^2(1-\mu)^2q^{|l|-1}}{\Gamma(n-\nu+1)\Gamma(n+1)\Gamma^2(|l|+\nu+1-\mu)}f^2(\mu). \tag{44}$$

Здесь введена функция $f(\mu)$

$$f(\mu) = \frac{\sin\mu\pi}{\mu(1-\mu)\pi}, \quad 0 \le \mu \le 1, \tag{45}$$

обладающая очевидными свойствами

$$f(\mu) = f(1-\mu), \quad f(0) = f(1) = 1, \quad f_{\max}\left(\mu = \frac{1}{2}\right) = \frac{4}{\pi} > 1, \ 1 \le f(\mu) \le \frac{4}{\pi}. \tag{46}$$

Видим, что на отрезке $0 \le \mu \le 1$ функция $f(\mu)$ слабо отличается от 1.

При этом переходе ситуация значительно отличается от рассмотренных ранее случаев, а именно, эффективно излучение происходит только из состояния $l = -1$, что физически оправдано: при рассматриваемом переходе меняется тип состояния, а при $l = -1$ классическая траектория наиболее близко проходит около находящегося вне орбиты соленоида и поэтому именно из этого состояния перейти в состояние, при котором соленоид окажется внутри траектории, наиболее вероятно. Замечательным является и тот факт, что ограничения на номер излучаемой гармоники не возникают. При $l = -1$ имеем

$$R_{21} = \frac{\Gamma(n+2-\mu)(\Gamma(n-\nu+1+\mu)\mu^2(1-\mu)^2}{\Gamma(n+1)\Gamma(n-\nu+1)(\nu-\mu+1)^2} f^2(\mu), \tag{47}$$

и для $\overline{W}_{21}$ найдем

$$\overline{W}_{21} = \frac{2\Gamma(n+2-\mu)\mu^2(1-\mu)^2 M^{21} f^2(\mu)}{(2n+1)\Gamma(n+1)}\overline{S^2},$$

$$M^{21} = \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu^{21}, \quad M_\nu^{21} = \frac{\Gamma(n-\nu+1+\mu)}{\Gamma(n-\nu+1)}\left(\frac{\nu-\mu}{\nu-\mu+1}\right)^2. \tag{48}$$

Отсюда, например, при $n = 1$ получим

$$\overline{W}_{21}(n=1) = \frac{2\mu^2(1-\mu)^4}{3(2-\mu)} f(\mu)\overline{S^2}. \tag{49}$$

При больших значениях n получить точное замкнутое выражение для M^{21} нам не удалось. Однако несложно дать двусторонние оценки для возникающих сумм. Покажем, как это сделать, на типичном примере. Рассмотрим

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{\Gamma(n+2-\mu-\nu)}{\Gamma(n+1-\nu)}\left(\frac{\mu+\nu}{\mu+\nu-1}\right)^2 = \frac{\Gamma(n+2-\mu)}{\Gamma(n+1)}\frac{\mu^2}{(1-\mu)^2} + \frac{\Gamma(n+1-\mu)}{\Gamma(n+1)}\frac{n(1+\mu)^2}{\mu^2}$$
$$+\frac{n\,(n-1)\,\Gamma(n-\mu)}{\Gamma(n+1)}\left(\frac{2+\mu}{1+\mu}\right)^2 + \sum_{\nu=3}^{n}\frac{\Gamma(n+2-\mu-\nu)}{\Gamma(n+1-\nu)}\left(\frac{\mu+\nu}{\mu+\nu-1}\right)^2. \tag{50}$$

Но, при $\nu > 3$ имеем

$$1 < \left(\frac{\mu+\nu}{\mu+\nu-1}\right)^2 < \left(\frac{3+\mu}{2+\mu}\right)^2, \tag{51}$$

что приводит к соотношению

$$\sum_{\nu=3}^{n}\frac{\Gamma(n+2-\mu-\nu)}{\Gamma(n+1-\nu)}\left(\frac{\mu+\nu}{\mu+\nu-1}\right)^2 = \delta\sum_{\nu=3}^{n}\frac{\Gamma(n+2-\mu-\nu)}{\Gamma(n+1-\nu)}. \tag{52}$$

Последняя сумма вычисляется точно поскольку известен следующий результат

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\Gamma(n-\nu+1+\mu)}{\Gamma(n-\nu+1)} = \frac{\Gamma(n+1+\mu)}{(1+\mu)\Gamma(n)}, \tag{53}$$

Для δ имеем двустороннюю оценку

$$1 < \delta < \left(\frac{3+\mu}{2+\mu}\right)^2. \tag{54}$$

Эту оценку при желании всегда можно улучшить, если в (50) точно учесть еще несколько первых членов.

Расчеты, выполненные подобным образом, приводят к следующим результатам для излучаемой мощности

$$\overline{W}_{21} = \frac{2n}{2n+1} R_n(\mu)\mu^2(1-\mu)^2 \left[\left(\frac{1-\mu}{2-\mu}\right)^2 + (n-1)\delta \right] \overline{S^2}, \quad \frac{1}{2} < \delta < 1, \tag{55}$$

где $R_n(\mu)$ имеет вид

$$R_n(\mu) = \frac{\Gamma(n+\mu)\Gamma(n+2-\mu)}{\Gamma^2(n+1)} f^2(\mu) \ ,$$
$$R_0(\mu) = \frac{f(\mu)}{\mu}, \ R_1(\mu) = (2-\mu) f(\mu) \ , \ R_2 = \frac{1}{4}(1+\mu)(2-\mu)(3-\mu) f(\mu) \ , \ \ldots \ ,$$
$$\frac{n+1}{n} f^2(\mu) \geq R_n(\mu) \geq R_n(1) = 1, \ \lim_{n\to\infty} R_n = f^2(\mu) \ . \tag{56}$$

Легко видеть, что величины M_ν^{21} слабо меняются с изменением ν, что означает с физической точки зрения весьма любопытный факт примерно равновероятного излучения по крайней мере нескольких первых гармоник. При $\mu = 0$ величина $\overline{W}_{21} = 0$ и таких переходов нет, также, как их нет и при $\mu \to 1$ (они есть в следующих порядках по q). Тем самым мы видим, что ненулевая мантисса магнитного потока обеспечивает возможность переходов, запрещенных при $\mu = 0$, и эти переходы при $\mu > 0$ дают примерно одинаковый вклад в мощность излучения при всех (видимо, более точно – при нескольких первых) допустимых гармониках ν. Об этом, в частности, свидетельствует и то обстоятельство, что при больших n имеем $M^{21} \approx n$.

Особо выделим случай $\nu = 1$. Как уже отмечалось ранее, в этом переходе при $\nu = 1$ излучается частота (21), меньшая синхротронной частоты. Для $\nu = 1$ из (48) найдем

$$\overline{W}_{21}(\nu = 1) = \frac{2n}{2n+1} \left(\frac{\mu(1-\mu)^2}{2-\mu}\right)^2 \overline{S^2} R_n(\mu). \tag{57}$$

Таким образом мощность излучения этой частоты находится на уровне классической мощности, умноженной на величину

$$\left(\frac{\mu(1-\mu)^2 f(\mu)}{2-\mu}\right)^2 . \tag{58}$$

Наконец, рассмотрим переходы $1 \to 2$. Для этих переходов получим

$$R_{12} = \frac{\Gamma(n-\nu-\mu+2)\Gamma(n+\mu+1)(\nu+\mu)^2 q^l}{\Gamma(n-l+1)\Gamma(n-\nu+1)\Gamma^2(l-\nu+2-\mu)\Gamma^2(\nu+1+\mu)}. \tag{59}$$

Мы видим, что эффективно переходы осуществляются из состояния $l = 0$, что также, как и в предыдущем случае, физически оправдано. И здесь классическая траектория (охватывающая соленоид в начальном состоянии), проходит от соленоида на минимально возможном расстоянии и переходы со сменой типа состояния наиболее вероятны именно в этом случае. При $l = 0$ найдем

$$\overline{W}_{12} = \frac{2\Gamma(n+1+\mu)\mu^2(1-\mu)^2 f^2(\mu) M^{12}}{(2n+2\mu+1)\Gamma(n+1)} \overline{S^2},$$
$$M^{12} = \sum_{\nu=0}^{n} M_\nu^{12}, \quad M_\nu^{12} = \frac{\Gamma(n-\nu-\mu+2)}{\Gamma(n-\nu+1)} \left(\frac{\nu+\mu}{\nu+\mu-1}\right)^2 . \tag{60}$$

Главной особенностью здесь, как уже отмечалось, является возможность излучения гармоники $\nu = 0$ (даже в начальном состоянии $n = 0$), запрещенной при $\mu = 0$. Частота такого излучения определяется выражением (20). Для $\nu = 0$ найдем

$$\overline{W}_{12}(\nu = 0) = \mu^4 \frac{2(n+\mu)}{2(n+\mu)+1} R_n(\mu) \tag{61}$$

В частности, при $n=0$

$$\overline{W}_{12}(\nu=n=0)=\frac{2\mu^4 f(\mu)}{2\mu+1}\overline{S^2}. \tag{62}$$

Таким образом, мощность излучения этой частоты, согласно (61), на уровне классической мощности, умноженной на фактор

$$\mu^4 f^2(\mu). \tag{63}$$

В рассматриваемом переходе, как и в предыдущем случае, гармоники различных номеров ν излучаются примерно равновероятно (дают примерно равный вклад в мощность излучения), так как M_ν^{12} в (60) слабо меняется с изменением ν. Вычислить M^{12} точно при любых n нам не удалось. Двусторонняя оценка дает следующий результат

$$\overline{W}_{12}=\frac{2(n+\mu)}{2(n+\mu)+1}R_n(\mu)\left[\mu^4+\frac{n(1-\mu^2)^2}{n+1-\mu}+\frac{n(n-1)\mu^2(1-\mu)^2\delta}{n+1-\mu}\right]\overline{S^2}. \tag{64}$$

При $\mu=0$ все переходы, кроме $\nu=1$, исчезают (оставаясь в приближении следующих порядков по q) и целиком связаны, тем самым, с эффектом Ааронова-Бома.

6 Классическое приближение и эффект Ааронова-Бома

В квантовой теории синхротронного излучения было показано (см. [4], стр. 80), что переход к классическому пределу в квантовых формулах для мощности излучения осуществляется путем разложения по малой в классическом пределе величине $\frac{\nu}{n}$ с использованием предельной формулы (I.4.37). Очевидно, что такой переход мы можем осуществить и в нашем случае. Но при этом следует иметь ввиду, что эффективный номер гармоники (9) сохраняет свой вид, поскольку мантисса магнитного потока μ не может быть истолкована в классических терминах. Осуществляя такой переход, получим для классической мощности W_j^{cl}

$$W_j^{cl}=\frac{e^4H^2\left(1-\beta_j^2\right)}{m_0^2c^3}\sum_{\nu,j'}\int\limits_0^\pi \sin\theta d\theta\bar{\nu}^2 Q_{jj'}^{cl}\left|F^{cl}\right|^2. \tag{65}$$

где соответствующие классические величины имеют вид

$$F^{cl}=l_2\beta_j J'_{jj'}(z)+l_3\mathrm{tg}\theta J_{jj'}(z),\quad z=\bar{\nu}\beta_j\sin\theta, \tag{66}$$

$$J_{11}=J_{22}=J_{12}=J_{\bar{\nu}}(z),\quad J_{21}=J_{-\bar{\nu}}(z). \tag{67}$$

$$Q_{jj'}^{cl}=\frac{1}{2}+(-1)^{j+j'}\int\limits_z^\infty dy\left[(2-j)J_{l-\bar{\nu}+1}(y)J_{l-\bar{\nu}}(y)+(j-1)J_{|l|+\bar{\nu}}(y)J_{|l|+\bar{\nu}-1}(y)\right]. \tag{68}$$

Здесь через $J_l(z)$ обозначены функции Бесселя. При $\mu=0$ в $\left|F^{cl}\right|^2$ исчезает зависимость от j' и в этом случае

$$\sum_{j'=1,2}Q_{jj'}^{cl}=1, \tag{69}$$

что приводит к известному [3] классическому выражению для спектрально-углового распределения излучения. Выражения $Q_{jj'}^{cl}$ для конкретных j,j' можно записать в более удобной форме

$$Q_{11}^{cl}=\begin{cases}1-\int\limits_0^z J_{l-\nu+1}(y)J_{l-\nu}(y)dy, & l\geq\nu,\\ \int\limits_0^z J_{\nu-l-1}(y)J_{\nu-l}(y)dy, & l<\nu,\end{cases} \tag{70}$$

$$Q_{12}^{cl} = \begin{cases} \int\limits_0^z J_{l-\nu+1-\mu}(y) J_{l-\nu-\mu}(y) dy, & l \geq \nu, \\ \frac{1}{2} - \int\limits_z^\infty J_{l-\nu+1-\mu}(y) J_{l-\nu-\mu}(y) dy, & l < \nu, \end{cases} \tag{71}$$

$$Q_{22}^{cl} = 1 - \int\limits_0^z J_{|l|+\nu}(y) J_{|l|+\nu-1}(y) dy, \tag{72}$$

$$Q_{21}^{cl} = \int\limits_0^z J_{|l|+\nu-\mu}(y) J_{|l|+\nu-1-\mu}(y) dy. \tag{73}$$

Отсюда, в частности, в нерелятивистском приближении несложно получить

$$W_j^{cl} = W^{cl} \overline{S^2} \sum_{j'} \overline{W}_{jj'}^{cl}, \quad \overline{W}_{jj}^{cl} = 1, \quad \overline{W}_{12}^{cl} = \mu^4 f^2(\mu),$$
$$\overline{W}_{21}^{cl} = \left(\frac{\mu(1-\mu)^2 f(\mu)}{2-\mu} \right)^2, \tag{74}$$

причем для переходов $1 \to 2$ выбрано $l = \nu = 0$ и для переходов $2 \to 1$ выбрано $|l| = \nu = 1$. Выражения (74) точно соответствуют результатам квантовой теории (40), (43), (58), (61) в пределе $n \to \infty$. Поскольку квантовые числа l – целые, то они никак не могут быть устранены из классических по существу выражений (70)-(73) и, следовательно, вырождение по числу l мощности излучения снимается и в классическом пределе. Число l в силу формулы (I.1.17) может быть связано с классическим выражением, характеризующим минимальное расстояние между классической траекторией и соленоидом

$$\hbar(l + \mu) = \frac{eH}{2c} \left(R^2 - R_0^2 \right). \tag{75}$$

Соответственно, если фиксирована классическая правая часть выражения (75), то при $\hbar \to 0$ следовало бы считать $|l| \sim \frac{1}{\hbar} \to \infty$. Но тогда из (70)-(73) следует, что

$$Q_{jj'}^{cl} = \delta_{jj'}. \tag{76}$$

Этот вывод физически вполне понятен. В классике не учитывается обратная реакция излучения, траектория движения считается заданной и смены типа состояния не может происходить. Подчеркнем ещё раз, что классические по форме выражения (65)-(73), справедливые в предположении $\frac{\nu}{n} \ll 1$ (что во всех практически интересных случаях выполняется), тем не менее, несут на себе нетривиальные следы квантовой теории. В частности, при $\mu = 0$ они позволяют дать классическую оценку вкладов переходов в синхротронном излучении при различных начальных квантовых числах l, связанных со сменой типа состояния (ведь смена типа состояния происходит и при $\mu = 0$).

Классические формулы (70)-(73) позволяют определить общий характер зависимости от l излучаемой мощности. Несложно найти равенства

$$Q_{11}^{cl} = \sum_{k=-\infty}^{l-\nu} J_k^2(z), \quad Q_{12}^{cl} = \sum_{k=l-\nu+1}^{\infty} J_{k-\mu}^2(z),$$
$$Q_{22}^{cl} = \sum_{k=-\infty}^{|l|+\nu-1} J_k^2(z), \quad Q_{21}^{cl} = \sum_{k=|l|+\nu}^{\infty} J_{k-\mu}^2(z), \tag{77}$$

из которых с очевидностью следует, что Q_{11}^{cl} и Q_{22}^{cl} монотонно возрастают с ростом абсолютного значения l, причем

$$\lim_{|l| \to \infty} Q_{jj}^{cl} = 1, \tag{78}$$

а величины Q_{12}^{cl} и Q_{21}^{cl} монотонно убывают (до нуля при $|l| \to \infty$) с ростом $|l|$. Таким образом, при малых квантовых поправках эффект Ааронова-Бома в синхротронном излучении проявляется максимальным образом в начальных состояниях $l = 0, -1$.

7 Точные выражения для мощности изучения электрона, движущегося в суперпозиции однородного магнитного и соленоидального полей

Точные решения уравнения Дирака для электрона в однородном магнитном поле при наличии соленоидального магнитного поля (поля Ааронова- Бома) найдены в [1]. Также, как и в случае бесспиновой частицы, для электрона происходит частичное снятие вырождения энергетического спектра по орбитальному квантовому числу l и возникают два типа состояний $(j = 1, 2)$. В соответствии с этим меняется спектральный состав излучения. В частности, возникает излучение сверхнизких частот (20) и (21) Качественный анализ частотного состава спектра, проведенный в разделе 2, не связан с наличием спина частицы и целиком может быть отнесен к электрону. Возникающие количественные различия описываются формулой (11) для частоты излучения электрона.

Характеристики спонтанного излучения электрона известным образом [4] выражаются через матричные элементы оператора $\vec{\alpha} \exp[-i(\vec{æ}\vec{r})]$. Вычисление матричных элементов по волновым функциям из [1] может быть произведено точно. Существенным моментом является возможность явно учесть зависимость характеристик излучения от ориентации начального и конечного спинов электрона. Наиболее интересной является ориентация спина на направление магнитного поля (физически выделенное направление). Такую ориентацию спина наиболее просто описать, задавая спинор v в (I.3.15) в виде

$$v = v_\zeta = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+\zeta \\ 1-\zeta \end{pmatrix} , \ \ \zeta = \pm 1 \,. \tag{79}$$

Здесь $\zeta = 1$ соответствует ориентации спина по направлению внешнего магнитного поля, $\zeta = -1$ соответствует ориентации спина против поля.

Мощность излучения естественным образом разбивается на две части - излучение, не сопровождающееся изменением ориентации спина (переходы без переворота спина); излучение, при котором спин меняет свою ориентацию (переходы с переворотом спина, spin-flip).

Точное выражение для спектрально-углового распределения мощности излучения электрона с учетом поляризации излучения и ориентации электронного спина может быть записано в виде

$$W_j = W_0 \left(\frac{H}{H_0}\right)^2 \varepsilon_j \int_0^\pi d\theta \, \sin\theta \sum_{\nu, j', \zeta'} Q_{jj'} \left[1 - 2p_j\,(\bar{\nu} + q)\right]^{-1} \frac{(\bar{\nu}+q)^3}{\bar{\nu}-q} |F_{jj'}|^2 \,. \tag{80}$$

В (80) введены величины

$$\varepsilon_j = 1 - \beta_j^2 = \left(\frac{m}{K_j}\right)^2 = \left(\frac{m_0 c^2}{E_j}\right)^2 , \ p_j = \frac{1}{2}\frac{H}{H_0}\frac{\varepsilon_j}{1+\sqrt{\varepsilon_j}} \,. \tag{81}$$

Величина $Q_{jj'}$, связана с суммированием по конечным орбитальным квантовым числам. Замечательным является то, что для электрона $Q_{jj'}$ точно совпадает с выражением (25) для бесспиновой частицы и все выводы раздела 3 в этой части целиком переносятся на рассматриваемый здесь случай.

Величину $F_{jj'}$ для электрона можно записать в следующем виде

$$F_{jj'} = l_2 F_{jj'}^{(2)} + l_3 F_{jj'}^{(3)}, \ \ F_{jj'}^{(2)} = \sqrt{\frac{H}{H_0}\frac{\varepsilon_j}{2q}} \left[\delta_{\zeta,\zeta'} \, (-1)^{j-1} \left(\frac{1+\zeta}{2} A_+^j + \frac{1-\zeta}{2} A_-^j\right) + \right.$$

$$+\delta_{\zeta,-\zeta'} q \mathrm{ctg}\theta \left(\frac{1+\zeta}{2}\chi^j_+ + \frac{1-\zeta}{2}\chi^j_- \right) \Big] \; , \; F^{(3)}_{jj'} = \delta_{\zeta,\zeta'} (-1)^{j-1} \mathrm{ctg}\theta \times$$

$$\times \left(\frac{1+\zeta}{2} B^j_+ + \frac{1-\zeta}{2} B^j_- \right) + \delta_{\zeta,-\zeta'} p_j \left[(-1)^{j-1} \frac{1+\zeta}{2} C^j_+ + \frac{1-\zeta}{2} C^j_- \right] \; , \tag{82}$$

где

$$A^j_\pm = 2q \left[1 - p_j \left(\bar\nu + q \right) \right] \frac{d\varphi^j_\pm}{dq} \mp \left[q - p_j \left(\bar\nu + q \right)^2 \right] \varphi^j_\pm$$

$$B^j_\pm = \left[1 - p_j \left(\bar\nu + q \right) \right] \varphi^j_\pm + 2q p_j \frac{d\varphi^j_\pm}{dq}, \; C^j_\pm = \left[1 \pm \sqrt{\varepsilon_j} \left(\bar\nu + q \right) \right] \chi^j_\pm + 2q \frac{d\chi^j_\pm}{dq},$$

$$\varphi^1_+ = I_{\bar n - 1, \bar n' - 1}(q), \; \varphi^2_+ = I_{\bar n' - 1, \bar n - 1}(q), \; \varphi^1_- = I_{\bar n, \bar n'}(q), \; \varphi^2_- = I_{\bar n', \bar n}(q),$$

$$\chi^1_+ = I_{\bar n - 1, \bar n'}(q), \; \chi^2_+ = I_{\bar n', \bar n - 1}(q), \; \chi^1_- = I_{\bar n, \bar n' - 1}(q), \; \chi^2_- = I_{\bar n' - 1, \bar n}(q) \, .$$

Здесь штрихами обозначены конечные квантовые числа. Величины l_2 и l_3 характеризуют поляризацию излучения; произведено разбиение на части без переворота спина ($\sim \delta_{\zeta,\zeta'}$) и с переворотом спина ($\sim \delta_{\zeta,-\zeta'}$); $I_{n,n'}(x)$ - функции Лагерра.

Состояние $n = 0$ является особым: при $j = 2$ в этом состоянии спин ориентирован только против поля. Следовательно, переходы в это состояние также носят особый характер: без переворота спина возможны только из состояния $\zeta = -1$ ($A^j_+ = B^j_+ = \varphi^j_+ = 0$), а с переворотом спина только из состояний $\zeta = 1$ ($C^j_- = \chi^j_- = 0$). При $j = 1$ это единственное состояние, волновая функция которого не ограничена (обращается в ∞ при $r = 0$, оставаясь однако квадратично интегрируемой). Один из таких переходов ниже будет изучен отдельно.

Из (82) следует, что остается справедливым основной вывод: мощность изучения зависит только от мантиссы магнитного потока соленоидального поля, но не от его абсолютной величины.

Рассматриваемое излучение не обладает преимущественной круговой поляризацией, полные (проинтегрированные по углам) излучаемые мощности правой и левой круговых поляризаций одинаковы, как и для бесспиновой частицы. Однако, как это следует из (82) и свойств функций Лагерра, при переходе $2 \to 1$ и при переходе $2 \to 2$ с переворотом спина при начальной ориентации спина $\zeta = 1$ знак круговой поляризации противоположен ее знаку при всех других переходах. В дальнейшем будем анализировать только линейную поляризацию излучения.

8 Анализ особенностей излучения в приближении слабого однородного магнитного поля

Рассмотрим случай слабого однородного магнитного поля. Магнитное поле мы называем слабым, если $q \ll 1$ и начальные квантовые числа не слишком велики (так, что частица остается нерелятивистской). В этом приближении основной вклад в излучение вносят переходы без переворота спина. Переходы с переворотом спина вносят вклад $\sim H/H_0 \ll 1$, к основному, а в некоторых случаях (выделенных ниже) и в более высоких порядках по H/H_0 . Во всех случаях мы ограничимся получением первого в разложении по H/H_0 ненулевого члена.

Рассмотрим часть излучения, обусловленную переходами без изменения типа состояния ($j = j'$). В этом случае основной вклад в излучение дают переходы $\nu = 1, l' = l - 1$. Если начальное орбитальное квантовое число $l \neq 0$, то для излучаемой мощности найдем

$$W_j = W^{\mathrm{cl}}_j \left\{ \delta_{\zeta,\zeta'} \left(\frac{1+\zeta}{2} \frac{\bar n - 1}{\bar n} + \frac{1+\zeta}{2} \right) S_0 + \right.$$

$$\left. + \delta_{\zeta,-\zeta'} \left[\frac{1+\zeta}{2} \frac{H}{H_0} \frac{S_1}{2\bar n} + \frac{1-\zeta}{2} \left(\frac{H}{H_0} \right)^3 \frac{\bar n - 1}{70} S_2 \right] \right\} \, . \tag{83}$$

Здесь через W_j^{cl} обозначено классическое выражение для мощности синхротронного излучения в квазирелятивистском случае (35) и введены факторы, характеризующие линейную поляризацию излучения

$$S_0 = \frac{3}{4}l_2^2 + \frac{1}{4}l_3^2\,,\ S_1 = \frac{1}{4}l_2^2 + \frac{3}{4}l_3^2\,,\ S_2 = \frac{1}{8}l_2^2 + \frac{7}{8}l_3^2\,. \tag{84}$$

Из (83) следует, что переходы с переворотом спина дают вклад $\sim H/H_0$ к основному при $\zeta = 1$ и вклад $\sim (H/H_0)^3$ при $\zeta = -1$, т.е. состояние $\zeta = -1$ является более устойчивым и возникает явление радиационной самополяризации (Self-polarization) электронов [4]. Эффект Ааронова-Бома проявляется здесь лишь в том, что эффективное квантовое число $\bar{n}$ не всегда целое: при $j = 1,\, \bar{n} = n + \mu$. Из (83) также следует, что излучение обладает сильной линейной поляризацией, причем в излучении с переворотом спина при $\zeta = 1$ компоненты линейной поляризации меняются местами по отношению к излучению без переворота спина, а при $\zeta = -1$ линейная поляризация излучения с переворотом спина воспроизводит (с перестановкой σ и π-компонент) линейную поляризацию излучения в релятивистском случае [4]. Без учета поляризации излучения при $\mu = 0$ выражения (83) были известны ранее [9,10].

Если в начальном состоянии $l = 0$, то переход без изменения типа состояния подавлен и происходит в следующих порядках по H/H_0. Например, для переходов без переворотов спина при $l = 0$ найдем

$$W = W^{\mathrm{cl}}\frac{H}{H_0}\frac{3n\left(1-\beta^2\right)}{10}\left(\frac{1+\zeta}{2}\frac{n+\mu-1}{n+\mu} + \frac{1-\zeta}{2}\right)\left(\frac{5}{6}l_2^2 + \frac{1}{6}l_3^2\right)\,. \tag{85}$$

Как видим, поляризация излучения в этом случае отличается от всех предыдущих, что может служить способом идентификации этого перехода.

Наиболее интересными сточки зрения проявления эффекта Ааронова-Бома являются переходы с изменением типа состояния. Главной особенностью этих переходов является то, что они осуществляются (в низшем возможном порядке по H/H_0) только из состояния $l = 0$ в состояние $l' = -1$ (переход $1 \to 2$) или из состояния $l = -1$ в $l' = 0$ (переход $2 \to 1$). Переходы с другими орбитальными квантовыми числами подавлены (происходят в более высоких порядках по H/H_0). При этих переходах не возникает жесткого ограничения на номер излучаемой гармоники. Происходит явление, которое мы назовем квантовой деформацией спектра. Суть явления в том, что примерно равновероятно излучается некоторая группа частот и в спектре нет резко выраженного максимума.

Проследим характерные особенности расчетов на примере перехода $1 \to 2$ без переворота спина. Выражение для излучаемой мощности в этом случае имеет вид

$$W = W^{\mathrm{cl}}S_0M_{12}\delta_{\zeta,\zeta'}\,, \tag{86}$$

где S_0 определено в (84), а безразмерная величина M_{12} является функцией мантиссы магнитного потока, начального спинового квантового числа и номера начального энергетического уровня и имеет вид

$$\begin{aligned} M_{12} &= \mu^2(1-\mu)^2 f^2(\mu)\frac{\Gamma(n+\mu)}{\Gamma(n+1)}\times \\ &\times\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\Gamma(n+2-\mu-\nu)}{\Gamma(n+1-\nu)}\left(\frac{\mu+\nu}{\mu+\nu-1}\right)^2\left(\frac{1+\zeta}{2}\frac{n-\nu}{n+\mu} + \frac{1-\zeta}{2}\right)\,. \end{aligned} \tag{87}$$

В частности, здесь возможен переход $\nu = 0$ с излучением сверхнизкой частоты (20) и для такого перехода имеем

$$M_{12}(\nu = 0) = \mu^4 R_n(\mu)\left(\frac{1+\zeta}{2}\frac{n}{n+\mu} + \frac{1-\zeta}{2}\right), \tag{88}$$

Такой переход возможен даже из состояния $n = 0$, для которого найдем

$$M_{12}(n = 0, \zeta, \mu) = \frac{1-\zeta}{2}\mu^3 f(\mu)\,. \tag{89}$$

Учитывая, что в состоянии $j = 1, n = 0$

$$\beta^2 = 2\mu H/H_0 \tag{90}$$

для излучаемой мощности (86) при $n = 0$ найдем

$$W(n=0) = \frac{4}{3}\frac{1-\zeta}{2} W_0 \left(\frac{H}{H_0}\right)^3 \mu^4 f(\mu) S_0 \,. \tag{91}$$

что согласуется также с формулой (62), если учесть, что для бесспиновой частицы в этом состоянии

$$\beta^2 = (1+2\mu)\, H/H_0 \,. \tag{92}$$

При больших значениях n сумму по ν в (87) в компактном виде нам вычислить не удалось, однако несложно дать двусторонние оценки для возникающих сумм, как это было сделано в разделе 5.

Расчеты, выполненные подобным образом, приводят к следующим результатам для излучаемой мощности при переходах со сменой типа состояния без переворота спина

$$W = W^{\mathrm{cl}} R_n(\mu) \left(\frac{1+\zeta}{2} M^+ + \frac{1-\zeta}{2} M^-\right) S_0 \,,$$

$$M_{12}^+ = \frac{n}{n+\mu}\left[\mu^4 + \frac{(n-1)\left(1-\mu^2\right)^2}{n+1-\mu} + \frac{(n-1)\,(n-2)\,\mu^2\,(1-\mu)^2}{n+1-\mu}\delta_1\right] ,$$

$$M_{12}^- = \mu^4 + \frac{n\left(1-\mu^2\right)^2}{n+1-\mu} + \frac{n\,(n-1)\,\mu^2\,(1-\mu)^2}{n+1-\mu}\delta_1 \,,$$

$$M_{21}^+ = \frac{\mu\,(1-\mu)^2\, n}{n+\mu-1}\left[\mu\left(\frac{1-\mu}{2-\mu}\right)^2 + (n-1)\,\delta_2\right] ,$$

$$M_{21}^- = \mu^2\,(1-\mu)^2\left[\left(\frac{1-\mu}{2-\mu}\right)^2 + (n-1)\,\delta_2\right] , \tag{93}$$

где для величин δ_k, $(k = 1, 2)$ имеем двустороннюю оценку

$$1 < \delta_1 < 2\,,\ 1/2 < \delta_2 < 1\,. \tag{94}$$

Существенным моментом является то, что с ростом n величины $M_{ij}^{\pm}$ при $\mu \neq 0, 1$ возрастают линейно по n (что имеет место и для бесспиновой частицы). При $\mu = 0, 1$ этого роста нет и в этом случае имеем

$$\lim_{n\to\infty} M_{12}^{\pm}(\mu=0,1) = A\delta_{\nu,1}\,,\ \ A(\mu=1) = 1,\ A(\mu=0) = \frac{n}{n+1},\ \ M_{21}^{\pm}(\mu=0,1) = 0\,. \tag{95}$$

Переходы, дающие ненулевой влад в $M_{21}^{\pm}$ при $\mu = 0, 1$ осуществляются в более высоких порядках по H/H_0. Именно такая зависимость мощности излучения от n свидетельствует о том, что при ненулевой мантиссе магнитного потока возникает при переходах со сменой типа состояния примерно равновероятное излучение целой группы частот, причем количество частот в этой группе сравнимо с номером энергетического уровня.

Аналогичные расчеты излучаемой мощности при переходах со сменой типа состояния и перевороте спина дают следующие результаты.

Для переходов $1 \to 2$

$$W_{12} = W^{\mathrm{cl}} R_n(\mu)\left[\frac{1+\zeta}{2}\frac{H}{H_0}\frac{S_1}{2\,(n+\mu)} N_{12}^+ + \frac{1-\zeta}{2}\left(\frac{H}{H_0}\right)^3 \frac{2n}{35} N_{12}^-\right] ,$$

$$N_{12}^{+} = \mu^6 + \frac{n(1+\mu)^2(1-\mu^2)^2}{n+1-\mu} + \frac{n\,(n-1)\,(n+2)^2\mu^2(1-\mu)^2}{n+1-\mu}\delta_1\ ,$$

$$N_{12}^{-} = \frac{\mu^6}{(1+\mu)^2}\left(\frac{\mu^2}{8}l_2^2 + \frac{7}{8}l_3^2\right) + \frac{(n-1)\,(1-\mu^2)^2(1+\mu)^2}{(n+1-\mu)\,(2+\mu)^2}\left[\frac{(1+\mu)^2}{8}l_2^2 + \frac{7}{8}l_3^2\right] +$$

$$+\frac{(n-1)\,(n-2)\,\mu^2\,(1-\mu)^2\,\delta_1}{n+1-\mu}\left[\frac{(n+2)^2}{8}l_2^2 + \frac{7}{8}l_3^2\right]. \tag{96}$$

Для переходов $2 \to 1$

$$W_{21} = W^{\mathrm{cl}}R_n(\mu)\left[\frac{1+\zeta}{2}\left(\frac{H}{H_0}\right)^3\frac{2n}{35}N_{21}^{+} + \frac{1-\zeta}{2}\frac{H}{H_0}\frac{\mu(1-\mu)^2S_1}{2(n+\mu-1)}N_{21}^{-}\right],$$

$$N_{21}^{+} = \frac{(1-\mu)^6}{(2-\mu)^2}\left[\frac{(1-\mu)^2}{8}l_2^2 + \frac{7}{8}l_3^2\right] + \frac{(n-1)\,\mu^2(2-\mu)^4}{(n-1+\mu)\,(3-\mu)^2}\left[\frac{(2-\mu)^2}{8}l_2^2 + \frac{7}{8}l_3^2\right] +$$

$$+\frac{(n-1)\,(n-2)\,\mu^2\,(1-\mu)^2\,\delta_1}{n-1+\mu}\left[\frac{(n+2)^2}{8}l_2^2 + \frac{7}{8}l_3^2\right],$$

$$N_{21}^{-} = \frac{\mu(1-\mu)^4}{(2-\mu)^2} + (n-1)\,(n+2)^2\delta_2\,. \tag{97}$$

Здесь рост излучаемой мощности с ростом n еще заметнее. Он пропорционален n^4, однако и здесь этот рост происходит лишь при $\mu \neq 0, 1$ и его нет при $\mu = 0, 1$. Весьма существенно, на наш взгляд, что поляризация излучения для таких переходов заметно меняется как с изменением μ, так и n.

Но главной (и весьма неожиданной, на наш взгляд) особенностью является потеря устойчивости спина $\zeta = -1$ при переходе $2 \to 1$. Как следует из (97), при

$$\delta_3 < \mu < 1 - \delta_3\ ,\ \delta_3 = \frac{n}{3}\frac{H}{H_0}\ , \tag{98}$$

более устойчивым при этом переходе оказывается спин $\zeta = 1$. Таким образом если электрон находился в начальном состоянии второго типа, то излучение при μ из интервала (98) приводит к возникновению двухфазной системы - электроны в конечном состоянии второго типа получают преимущественный спин против поля, а перешедшие в состояния первого типа приобретают преимущественный спин по полю. Ненулевая мантисса магнитного потока может играть роль фактора, деполяризующего спин. Деполяризирующая роль мантиссы полностью исчезает при $\mu = 0, 1$.

9 Проявление эффекта Ааронова-Бома в классическом приближении

Несложно, как и в случае бесспиновой частицы, провести аппроксимацию функций Лагерра функциями Бесселя в классическом приближении (что эквивалентно условию $\bar{\nu}/\bar{n} \ll 1$). В этом приближении мощность излучения может быть записана следующим образом

$$W_j = W_0\left(\frac{H}{H_0}\right)^2(1-\beta_j^2)\sum_{\nu,j'}\int_0^{\pi}Q_{jj'}^{cl}|F_{jj'}^{\mathrm{cl}}|^2\sin\theta\,d\theta\ . \tag{99}$$

Величина $Q_{jj'}^{cl}$ определена формулой (71) или (77), а для $F_{jj'}^{\mathrm{cl}}$ получим

$$F_{jj'}^{\mathrm{cl}} = \beta\delta_{\zeta,\zeta'}F_{jj'}^{(0)\mathrm{cl}} + \delta_{\zeta,-\zeta'}\frac{H}{H_0}\frac{1-\beta^2}{2}\bar{\nu}F_{jj'}^{(1)\mathrm{cl}}\ ,$$

$$F_{jj'}^{(0)\mathrm{cl}} = l_2 I'(z) + l_3 \cos\theta \frac{I(z)}{\beta \sin\theta} \; ,$$

$$F_{jj'}^{(1)\mathrm{cl}} = (-\zeta)^j \, l_2 \cos\theta \left[\frac{I(z)}{\beta\sin\theta} + \zeta I'(z) \right] - l_3 \left[\frac{aI(z)}{\beta\sin\theta} + \zeta I'(z) \right] \; ,$$

$$a = \cos^2\theta + \sqrt{1-\beta^2}\sin^2\theta \, , \; z = \bar{\nu}\beta\sin\theta \, . \tag{100}$$

Функции $I(z)$ для различного типа переходов имеют вид

$$I(z) = J_{\bar{\nu}}(\bar{\nu}\beta\sin\theta) \, , \; 1 \to 1, \; 2 \to 2, 1 \to 2,$$

$$I(z) = J_{-\bar{\nu}}(\bar{\nu}\beta\sin\theta) \, , \; 2 \to 1 \, . \tag{101}$$

В нерелятивистском приближении, учитывая, что в этом случае

$$\beta^2 = 2\bar{n}H/H_0 \, , \tag{102}$$

несложно восстановить результаты анализа предыдущего раздела. Из (100) следует, что ненулевая мантисса сохраняет роль деполяризующего фактора при переходах $2 \to 1$, но при $\mu = 0, 1$ в силу известного свойства

$$J_{-\nu}(x) = (-1)^{\nu} J_{\nu}(x) \, ,$$

имеющего место только при целых ν, деполяризация спина исчезает. Величина $F_{jj'}^{(0)\mathrm{cl}}$ воспроизводит известное классическое выражение (см. [3], формула (3.21)). Эффект Ааронова-Бома проявляется здесь в полном снятии вырождения мощности излучения по орбитальному квантовому числу l при $\mu \neq 0, 1$, что уже отмечалось в разделе 6.

10 Точный анализ мощности излучения при переходе $1 \to 2, \;\; n = 0$.

Проведем анализ точных выражений для мощности излучения при переходе $1 \to 2$ для электрона, находившегося в начальном состоянии на уровне $n = 0$. В этом случае излучается сверхнизкая частота (20), а волновые функции начального и конечного состояния имеют особенности, отмечавшиеся ранее.

Для величины Q_{12} несложно получить точное выражение

$$Q_{12} = \frac{q^{1-\mu}\exp\left(-q\right)\Phi\left(1, 2-\mu; q\right)}{\Gamma\left(2-\mu\right)} \, , \; q = \mu\frac{1-\sqrt{p}}{1+\sqrt{p}}, \; p = 1 - \alpha(1-x^2). \tag{103}$$

Здесь $\Phi(\alpha, \gamma; x)$ - вырожденная гипергеометрическая функция. В данном случае Φ можно выразить через неполную $\Gamma-$ функцию

$$\Phi\left(1, 2-\mu; x\right) = \left(1-\mu\right) x^{\mu-1} e^{x} \int_0^x e^{-y} y^{-\mu} dy \, , \; \mu < 1 \, . \tag{104}$$

Излучаемая мощность имеет следующее точное выражение

$$W = W_0 \frac{H}{H_0} \left(\alpha\mu\right)^2 f(\mu) G(\alpha, \mu) \, , \; \alpha = \frac{2\mu H}{H_0 + 2\mu H} \, ,$$

$$G(\alpha, \mu) = \int_0^1 \frac{\sqrt{p} + \sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{p}\left(1+\sqrt{p}\right)^3} e^{-2q} \Phi\left(1, 2-\mu; q\right) F dx \, ,$$

$$F = \delta_{\zeta,\zeta'} \frac{1-\zeta}{2} \left[l_2^2 + l_3^2 \psi\left(x\right) \right] + \delta_{\zeta,-\zeta'} \frac{\alpha}{\left(1+\sqrt{1-\alpha}\right)^2} \frac{1+\zeta}{2} \left[l_2^2 \psi\left(x\right) + l_3^2 \right] \, ,$$

$$\psi\left(x\right) = \frac{x^2\left(1+\sqrt{1-\alpha}\right)^2}{\left(\sqrt{p} + \sqrt{1-\alpha}\right)^2} \, . \tag{105}$$

Зависимость от магнитного поля в функцию $G(\alpha,\mu)$ входит только через величину α

$$0<\alpha<1,\ \alpha\approx 2\mu\frac{H}{H_0}\ \left(\frac{H}{H_0}\ll 1\right),\ \lim_{H\to\infty}\alpha=1\ . \tag{106}$$

Легко видеть, что

$$\alpha=1-(m/K)^2=\beta^2\,, \tag{107}$$

однако для этого состояния электрона интерпретировать β как его орбитальную скорость (классическая аналогия) неуместно.

Из (105) следует, что в рассматриваемом случае линейная поляризация излучения при переходах без переворота спина и с переворотом спина точно отличаются друг от друга взаимной сменой σ и π-компонент. Если мы в (105) произведем суммирование по состояниям поляризации излучения и конечным спиновым состояниям и усредним по начальным спиновым состояниям, то получим следующее выражение для полной мощности $\overline{W}$ излучения неполяризованного электрона

$$\overline{W}=2W_0\frac{H}{H_0}\alpha\mu^2 f(\mu)\int_0^1\frac{\sqrt{p}+\alpha-1}{\sqrt{p}\left(1+\sqrt{p}\right)^3}e^{-2q}\Phi\left(1,2-\mu;q\right)dx\ . \tag{108}$$

В приближении слабого поля ($\alpha\ll 1$) из (105) получим

$$W=\frac{1}{3}W_0\frac{H}{H_0}(\alpha\mu)^2 f(\mu)\left(\delta_{\zeta,\zeta'}\frac{1-\zeta}{2}S_0+\delta_{\zeta,-\zeta'}\frac{\alpha}{4}\frac{1+\zeta}{2}S_1\right)\,, \tag{109}$$

что с учетом (106) точно воспроизводит (91) и (96) при $n=0$. Но здесь возможно рассмотреть и случай сверхсильного поля ($H\gg H_0,\ \alpha=1$). В пределе сверхсильного поля несложно получить, что $\psi(x)=1$ и для излучаемой мощности найдем

$$W=\frac{1}{2}\overline{W}\left(l_2^2+l_3^2\right)\left(\delta_{\zeta,\zeta'}\frac{1-\zeta}{2}+\delta_{\zeta,-\zeta'}\frac{1+\zeta}{2}\right)\,,$$

$$\overline{W}=W_0\frac{H}{H_0}\mu^2 f(\mu)J(\mu),\ J(\mu)=\int_0^1(1+x)e^{-2\mu x}\Phi\left(1,2-\mu;\mu x\right)dx\,. \tag{110}$$

Функция $J(\mu)$ — монотонно убывающая при $0<\mu<1$. В частности, несложно получить точные значения

$$J(0)=1,5;\ J(1)=2-\frac{3}{e}\approx 0,896\ . \tag{111}$$

Таким образом в сверхсильном поле переходы с переворотом и без переворота спина становятся равновероятными, а излучение полностью неполяризовано. Мощность излучения линейно растет с ростом поля.

11 Заключительные замечания

К сожалению, дальнейшие точные аналитические расчеты даже в классическом пределе провести пока не удается. Например, неизвестно, как аналитически сосчитать суммы типа

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}J_\nu^2(\nu x)J_\nu^2(\nu y)=f(x,y),\quad 0<x<1,\quad 0<y<1, \tag{112}$$

которые возникают в таких расчетах. Неизвестно также аналитическое выражение для сумм типа

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}J_{\bar\nu}(\bar\nu x)=\varphi_\mu(x),\quad \bar\nu=\nu+\mu,\quad 0<x<1. \tag{113}$$

Эти суммы известны только при $\mu=0,1/2$.

Однако можно высказать соображения о характере поведения величин $Q_{jj'}$ в ультрарелятивистском приближении. Опираясь на опыт теории синхротронного излучения [3], можно сказать, что

$$J_\nu(z) \sim \sqrt{\varepsilon}, \quad \varepsilon = 1 - \beta^2 \sin^2\theta \tag{114}$$

Величина ε в ультрарелятивистском случае имеет порядок

$$\varepsilon \sim \varepsilon_0 = \left(\frac{m_0 c^2}{E}\right)^2. \tag{115}$$

Ввиду наличия тождеств типа

$$\int_0^z J_\nu(y) J_{\nu-1}(y) dy = \nu \int_0^z \frac{J_\nu^2(y)}{y} dy + \frac{1}{2} J_\nu^2(z) \tag{116}$$

и предполагая, что в правой части этого выражения стоят величины одного порядка, мы найдем, что

$$\int_0^z J_\nu(y) J_{\nu-1}(y) dy \sim \varepsilon. \tag{117}$$

Учитывая, что при интегрировании по углам происходит понижение порядка

$$\int_0^\pi \varepsilon^{-s} \sin\theta d\theta \sim \varepsilon_0^{-s+1/2} \tag{118}$$

окончательно приходим к выводу, что в соответствии с (68) в ультрарелятивистском приближении

$$Q_{jj'} = \delta_{jj'} + \sqrt{\varepsilon_0}\alpha_{jj'}, \tag{119}$$

где $\alpha_{jj'}$ – некоторые конечные величины, Иными словами, переходы осуществляются практически без смены типа состояния. Изменение эффективного номера гармоники также не должно наблюдаться ввиду квазинепрерывного характера спектра. Такими образом, в ультрарелятивистском случае проявления эффекта Ааронова-Бома будут сильно подавлены (релятивистски малы по отношению к главным членам). Конечно, эти качественные соображения могут оказаться неприемлемыми при малых орбитальных квантовых числах $|l| = 0, 1, 2, \ldots$. Особенности поведения излучения в нерелятивистском случае могут служить в пользу последнего соображения.

Полученные точные выражения для мощности излучения могут служить предметом численного анализа при рассмотрении конкретных переходов (например, переходы на низких уровнях в сильных магнитных полях).

12 Основные физические результаты

Установлено, что проявления эффекта Ааронова-Бома в синхротронном излучении зависят только от мантиссы магнитного потока соленоидального поля, но не от его абсолютной величины и имеют место только при ненулевой мантиссе.

Наиболее яркими проявлениями эффекта Ааронова-Бома являются:

возможность излучения сверхнизких частот, не излучаемых при нулевой мантиссе;

квантовая деформация спектра излучения, выражающаяся в равновероятном излучении группы частот даже в слабом однородном поле и при нерелятивистском движении частиц;

сложная зависимость поляризации излучения от мантиссы магнитного потока и от типов переходов;

возможность деполяризующего влияния ненулевой мантиссы в известном явлении спиновой радиационной самополяризации электронного пучка.

полное снятие вырождения излучаемой мощности по квантовому числу l, ослабление влияния ненулевой мантиссы магнитного потока с увеличением $|l|$.

Работа поддержана грантами РФФИ, Минобразования России и фондом FAPESP (Бразилия).

Список литературы

[1] В.Г. Багров, Г.Ф. Копытов, В.Б. Тлячев.
Релятивистский электрон в постоянном магнитном поле и эффект Ааронова-Бома.
Труды Физического общества республики Адыгея, 1999. - N4. - С.6-33.

[2] V.G. Bagrov, D.M. Gitman.
Exact solutions of relativistic wave equations.
Kluwer Academic Publishers. Dordrecht/Boston/London. 1990, 323 p.

[3] А.А. Соколов, И.М. Тернов, В.Г. Багров.
Классическая теория синхротронного излучения.
В сборнике "Синхротронное излучение" под ред. А.А. Соколова, И.М. Тернова. – М.: Наука, 1966, с.18-71.

[4] А.А. Соколов, И.М. Тернов, В.Г. Багров, Р.А. Рзаев.
Квантовая теория излучения релятивистских электронов, движущихся в постоянном и однородном магнитном поле.
В сборнике "Синхротронное излучение" под ред. А.А. Соколова, И.М. Тернова. – М.: Наука, 1966, с. 72-151.

[5] А.Н. Матвеев.
К вопросу об излучении элементарных частиц, движущихся с релятивистскими скоростями.
Кандидатская диссертация. МГУ. 1954.

[6] А.А. Соколов, А.Н. Матвеев, И.М. Тернов.
ДАН СССР, 1955, т.102, с.65.

[7] А.Н. Матвеев.
О роли спина в излучении "светящегося" электрона.
ЖЭТФ, 1956. - Т.31. - N9. - С.479-489.

[8] В.Г. Багров.
Поляризационные свойства излучения бозона.
Известия ВУЗов. Физика. 1965. - Т.8. - N5. - С.121-127.

[9] В.Г. Багров, О.Ф. Дорофеев.
Излучение поляризованных электронов, находящихся на низких энергетических уровнях.
Вестник МГУ. Физика, астрономия. 1966. - Т.7. - N2. - С.97-101.

[10] И.М. Тернов, В.Г. Багров, О.Ф. Дорофеев.
Особенности поведения электронов, движущихся в магнитном поле на низких уровнях.
Известия ВУЗов. Физика. 1968. - Т.11. - N10. - С.63-69.