

Эффект Ааронова-Бома в синхротронном излучении.

В.Г. Багров, Д.М. Гитман, В.Б. Тлячев

11 марта 2000

1 Введение

В работе [1] были получены точные решения уравнений Дирака и Кляйна-Гордона для заряда, движущегося в однородном магнитном поле в комбинации с полем Ааронова-Бома (фактически эти решения уже были приведены в [2] (см. стр. 110), однако их особенности там не обсуждались). Эти решения могут служить базой построения квантовой теории излучения частиц в таком поле, что и является предметом настоящей работы. Мы будем использовать здесь результаты работы [1]. При ссылках на формулы этой работы мы будем к номеру формулы добавлять римскую цифру I.

В [1] уже отмечалось, что классические траектории частицы не зависят от наличия поля соленоида (если они не проходят через начало координат, что мы считаем выполненным). Поэтому с позиций классической теории спонтанное излучение заряда, движущегося в рассматриваемом поле, является синхротронным излучением и классическая теория такого излучения хорошо разработана [3].

Мы хотим рассмотреть излучение заряда, движущегося в рассматриваемом поле, методами квантовой теории, где влияние поля соленоида должно проявляться и характеристики излучения должны отличаться от соответствующих характеристик синхротронного излучения, также рассчитанных по квантовой теории и хорошо известных [4]. Возникающие различия уместно называть проявлениями эффекта Ааронова-Бома в синхротронном излучении.

2 Вычисление матричных элементов и анализ излучаемых частот

Рассмотрим спонтанное излучение бесспиновой частицы (квантовая теория синхротронного излучения для этого случая построена в работах [5, 6, 7, 8]). Характеристики излучения известным образом выражаются через матричные элементы оператора

$$\exp[-i(\vec{\alpha}\vec{r})\vec{P}], \quad (1)$$

где \vec{P} – оператор кинетического импульса (I.2.1), а волновой вектор фотона $\vec{\alpha}$ зададим в декартовых координатах в следующем виде

$$\vec{\alpha} = \alpha (\sin \theta \cos \varphi', \sin \theta \sin \varphi', \cos \theta). \quad (2)$$

Сферические углы θ , φ' характеризуют направление вылета фотона (угловое распределение излучения), а величина α определяет энергию (спектр) фотона E_{Φ}

$$E_{\Phi} = c\hbar\alpha. \quad (3)$$

Поляризацию излучения будем определять, как это принято в теории синхротронного излучения (подробное изложение дано в [3, 4]). Для этого следует построить σ и π -компоненты оператора импульса

$$\begin{aligned} P_\sigma &= -P_x \sin \varphi' + P_y \cos \varphi', \\ P_\pi &= (P_x \cos \varphi' + P_y \sin \varphi') \cos \theta - P_z \sin \theta. \end{aligned} \quad (4)$$

Используя операторные соотношения (I.1.19), несложно получить запись (4) через операторы a_1 , a_1^\dagger

$$\begin{aligned} P_\sigma &= i\hbar\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(a_1 e^{i\varphi'} - a_1^\dagger e^{-i\varphi'} \right), \\ P_\pi &= \hbar\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(a_1 e^{i\varphi'} + a_1^\dagger e^{-i\varphi'} \right) \cos \theta - P_z \sin \theta. \end{aligned} \quad (5)$$

Вычисление матричных элементов операторов (5) в обкладках начального $\psi_{n,l,k_3}^{(j)}$ и конечного $\psi_{n',l',k'_3}^{(j')}$ состояний (квантовые числа конечных состояний отмечаем штрихами) удается провести точно.

Отметим некоторые технические особенности вычислений. Запись (5) удобна тем, что можно воспользоваться формулами (I.2.14). Интегрирование по углу φ приводит, как и в теории синхротронного излучения (см. [4], стр. 81) к функциям Бесселя. При дальнейшем интегрировании по ρ в теории синхротронного излучения возникали интегралы типа (I.4.60), однако теперь появляются также интегралы типа (I.4.57), не возникавшие ранее. Это связано с тем, что для функций Лагерра не выполняется в нашем случае условие (I.4.22), которое всегда справедливо в теории синхротронного излучения. Матричные элементы не содержат величины l_0 и зависят только от мантиссы магнитного потока μ . Тем самым абсолютная величина потока Φ никак не сказывается на характеристиках излучения и существенна лишь мантисса магнитного потока.

Как и в теории синхротронного излучения, возникают два закона сохранения: закон сохранения z -компоненты, импульса

$$k_3 - k'_3 = \varkappa \cos \theta, \quad (6)$$

и закон сохранения энергии

$$K_j - K_{j'} = \varkappa. \quad (7)$$

Соотношения (6) и (7) совместно с (I.2.4), (I.2.6), либо (I.3.12) определяют частоту излучения \varkappa как функцию начальных и конечных квантовых чисел и угла вылета θ (в силу симметрии задачи \varkappa не зависит от φ'). Если ввести, как в теории синхротронного излучения, номер излучаемой гармоники ν

$$\nu = n - n', \quad (8)$$

то при $\mu = 0$ частота излучения \varkappa является функцией главного квантового числа n , номера гармоники ν и угла θ (см. [4], стр. 84) и не зависит от начальных и конечных орбитальных квантовых чисел l и l' .

При $\mu > 0$ вырождение частоты по числам l и l' частично снимается, \varkappa начинает зависеть от типа начального и конечного состояний $\varkappa = \varkappa_{jj'}$ в соответствии с (7). Если ввести эффективный номер гармоники $\bar{\nu} = \bar{\nu}_{jj'} = \bar{n} - \bar{n}'$, $\bar{n} = n + \mu(2 - j)$

$$\bar{\nu} = \bar{n} - \bar{n}' = \nu + \mu(j' - j) = \begin{cases} \nu, & j = j', \\ \nu + \mu, & j = 1, j' = 2, \bar{\nu} > 0, \\ \nu - \mu, & j = 2, j' = 1, \end{cases} \quad (9)$$

то несложно получить для бесспиновой частицы

$$\varkappa_{jj'} = \frac{K_j}{\sin^2 \theta} \left(1 - \sqrt{1 - \beta_j^2 \frac{2\bar{\nu}}{2\bar{n} + 1} \sin^2 \theta} \right). \quad (10)$$

Аналогичная формула для дираковской частицы

$$\varkappa_{jj'} = \frac{K_j}{\sin^2 \theta} \left(1 - \sqrt{1 - \beta_j^2 \frac{\bar{\nu}}{\bar{n}} \sin^2 \theta} \right). \quad (11)$$

отличается от (10) заменой $\bar{n} \rightarrow \bar{n} - 1/2$, что очевидно из сравнения (I.2.4), (I.2.6) и (I.3.12). Здесь β_j^2 классическая величина

$$\beta_j^2 = 1 - \left(\frac{m}{K_j}\right)^2 = 1 - \left(\frac{m_0 c^2}{E_j}\right)^2 \quad (12)$$

При получении (10) и (11) и далее впредь мы полагаем в начальном состоянии $k_3 = 0$. Выражения для \varkappa можно записать в других эквивалентных формах, например

$$\varkappa_{jj'} = \frac{2\gamma\bar{\nu}}{K_j + \sqrt{K_j^2 - 2\gamma\bar{\nu}\sin^2\theta}}. \quad (13)$$

Введем безразмерную переменную $q = q_{jj'}$

$$q = \frac{\varkappa^2 \sin^2\theta}{2\gamma}, \quad 0 \leq q < \bar{\nu}. \quad (14)$$

Несложно получить выражения

$$\varkappa = \frac{\gamma}{K_j}(\bar{\nu} + q); \quad \sin\theta = \sqrt{\frac{2}{\gamma}} K_j \frac{\sqrt{q}}{\bar{\nu} + q}; \quad \sqrt{K_j^2 - 2\gamma\bar{\nu}\sin^2\theta} = K_j \frac{\bar{\nu} - q}{\bar{\nu} + q}. \quad (15)$$

Выражения (13)-(15) формально сохраняют свой вид и для дираковской частицы.

Таким образом, при заданном типе начального состояния при $\mu > 0$ возникают две спектральные серии – одна при переходах в состояния того же типа (при этом $\bar{\nu} = \nu$), и другая при переходах с изменением типа состояния ($\bar{\nu} = \nu \pm \mu$), когда номер эффективной гармоники становится нецелым, его дробная часть определяется мантиссой μ . Если зафиксировать $\nu > 0$ и главное квантовое число состояния n , то можно получить следующие строгие при $\mu > 0$ неравенства

$$\varkappa_{21} < \varkappa_{11} < \varkappa_{22} < \varkappa_{12} \quad (16)$$

переходящие в равенства при $\mu = 0$. Разница между частотами \varkappa_{11} и \varkappa_{22} при полях $H \ll H_0$ (что практически всегда справедливо), где H_0 – швингеровское поле

$$H_0 = \frac{m_0^2 c^3}{e\hbar} \approx 4,41 \cdot 10^{13} \text{ гаусс} \quad (17)$$

имеет порядок

$$\varkappa_{22} - \varkappa_{11} \approx \varkappa_{22} \delta\mu, \quad \delta = \frac{\gamma}{K_1^2} = \frac{\gamma}{m^2} \cdot \frac{m^2}{K_1^2} = \frac{H}{H_0} \left(\frac{m_0 c^2}{E_1}\right)^2 \quad (18)$$

При типичных полях в ускорителе $H \sim 10^4$ гаусс и не слишком больших энергиях электронов $\delta < 10^{-9}$, и это различие несущественно. Разница же между частотами \varkappa_{12} и \varkappa_{21} в этих же предположениях имеет вид

$$\varkappa_{12} - \varkappa_{21} \approx 2\varkappa_{12} \frac{\mu}{\nu} = 2\frac{\omega}{c}\mu, \quad (19)$$

где ω – классическая синхротронная частота (I.1.7) и при наблюдении гармоник с небольшими номерами становится весьма заметной.

Чрезвычайно важной особенностью при $\mu > 0$ является возможность излучения гармоники $\nu = 0$ при переходе $1 \rightarrow 2 (j = 1, j' = 2)$. В синхротронном излучении такая гармоника не излучается. Для полей $H \ll H_0$ частота излучения на этой гармонике имеет вид

$$\omega_{12} = \omega\mu = \frac{ecH}{E_1}\mu, \quad (20)$$

где ω – синхротронная частота (I.1.7). Соответственно, в переходе $2 \rightarrow 1 (j = 2, j' = 1)$ при $\nu = 1$ излучается частота

$$\omega_{12} = \omega(1 - \mu). \quad (21)$$

Обе эти частоты меньше синхротронной ω . В обычном синхротронном излучении ($\mu = 0$) в спектре не могут присутствовать частоты, меньшие синхротронной частоты ω , тогда как в рассматриваемом случае такие частоты есть и они обусловлены исключительно ненулевой мантисой магнитного потока. Это одно из наиболее ярких проявлений эффекта Ааронова-Бома в синхротронном излучении.

3 Точные выражения для мощности излучения бесспиновой частицы

Как уже отмечалось, матричные элементы операторов (5) могут быть вычислены точно. Тем самым можно получить точные выражения для вероятности и мощности однофотонного излучения. Используя соотношения (I.4.11)-(I.4.14), мощность излучения с учетом его поляризации может быть записана в следующем виде

$$W_j = W_0 \frac{H}{H_0} \left(\frac{\gamma}{K_j^2} \right)^2 \sum_{\nu, i'} \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi \sin \theta d\theta \frac{(\bar{\nu} + q)^3}{\bar{\nu} - q} Q_{jj'} |F_{jj'}|^2. \quad (22)$$

Здесь введены следующие обозначения. Величина W_0 постоянная, имеющая размерность мощности

$$W_0 = e^2 \frac{m_0^2 c^3}{h^2}. \quad (23)$$

Для $F_{jj'}$ имеем

$$F_{jj'} = 2l_2 \sqrt{q} I'_{jj'}(q) + l_3 \operatorname{ctg} \theta \sqrt{\frac{2K_j^2}{\gamma}} I_{jj'}(q), \quad I_{1j'}(q) = I_{\bar{n}, \bar{n}'}(q), \quad I_{2j'}(q) = I_{\bar{n}', \bar{n}}(q). \quad (24)$$

$F_{jj'}$ не зависит от орбитального квантового числа l , определяется только главным квантовым числом \bar{n} , эффективной гармоникой $\bar{\nu}$, типом перехода (j, j') и поляризацией излучения. Поляризацию излучения задают величины l_2 и l_3 (см. [4]): полагая $l_2 = 1$, $l_3 = 0$, получаем σ -компоненту линейной поляризации; при $l_2 = 0$, $l_3 = 1$ имеем π -компоненту линейной поляризации; при $l_2 = l_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ - правую круговую, а при $l_2 = -l_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ - левую круговую поляризации; наконец, при $l_2^2 = l_3^2 = 1$, $l_2 \cdot l_3 = 0$ получаем полную мощность неполяризованного излучения.

Величина $Q_{jj'}$, зависит от начального орбитального числа l и связана с суммированием по конечным орбитальным квантовым числам l'

$$Q_{1j'} = \sum_{l'} I_{\bar{n}' - \bar{\nu}, \bar{n} - \bar{l}}^2(q), \quad Q_{2j'} = \sum_{l'} I_{\bar{n} - \bar{l}, \bar{n}' - \bar{\nu}}^2(q), \quad \bar{l} = l + \mu. \quad (25)$$

Суммирование по l' при $j' = 1$ производится в пределах $0 \leq l' \leq n - \nu$, при $j' = 2$ в пределах $-\infty < l' \leq -1$.

Таким образом видим, что если, например, в формулах (24) и (25) при $j = 1$ имеется определенное расположение индексов у функций Лагерра, то при $j = 2$ все изменения сводятся к перестановке (взаимной смене мест) этих индексов. Следует отметить, что это простое правило соблюдается только если запись ведется через эффективные квантовые числа \bar{n} , \bar{l} , \bar{n}' , \bar{l}' . Если бы запись велась через n , l , n' , l' , то соответствующая симметрия выглядела бы намного сложнее (ее формулировка конечно возможна, но выглядит гораздо более громоздкой).

Подинтегральные выражения не зависят от угла φ' и в (22) по φ' можно проинтегрировать, что формально будет соответствовать замене в (22)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' = 1, \quad (26)$$

что мы впредь будем подразумевать.

При интегрировании по θ суммарная круговая поляризация отсутствует. Связано это с тем, что преимущественная круговая поляризация, имеющая место в верхней полуплоскости ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$), точно компенсируется преимущественной круговой поляризацией другого знака в нижней полуплоскости ($\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$). Если мы не будем интересоваться круговой поляризацией, то всегда можно полагать в (22) $l_2 \cdot l_3 = 0$ и

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta = \int_0^1 dx, \quad x = \cos \theta. \quad (27)$$

4 Суммирование по конечным орбитальным квантовым числам

Если $\mu = 0$, то $|F|^2$ в (22) перестает зависеть от типа конечного состояния j' ввиду выполнения в этом случае свойства (I.4.22) для функций Лагерра. Эффективные квантовые числа при $\mu = 0$ совпадают с обычными $\bar{n} = n$, $\bar{l} = l$ и с учетом (I.4.22) из (25) найдем, учитывая (I.4.118)

$$\sum_{j'} Q_{jj'} = \sum_{k=0}^{\infty} I_{k,s}^2(q) = 1, \quad s = n - l, \quad (28)$$

что известно в теории синхротронного излучения [4]. Иными словами, при $\mu = 0$ исчезает зависимость мощности излучения от начального орбитального квантового числа l . В нашем же случае не равной нулю мантиссы μ величина $Q_{jj'}$ весьма сложно зависит от начального квантового числа l и чисел n , ν . Вырождение мощности излучения по l снимается полностью. Физически этот результат понятен: l характеризует, согласно (I.1.17), минимальное расстояние между классической траекторией и соленоидом, и мощность излучения зависит как от величины этого расстояния, так и того, находится ли соленоид внутри орбиты частицы или снаружи (знак l – тип состояния). В отсутствие соленоида начало координат ничем не выделено и зависимость от l естественным образом исчезает.

Суммирование по l' в (25) можно выполнить точно. Используя формулы (I.4.11)-(I.4.14), можно получить следующее выражение для производной $Q_{jj'}(q)$

$$\frac{d}{dq} Q_{jj'}(q) = (-1)^{1+j+j'} \sqrt{\frac{k+1}{q}} [(2-j)I_{k+1,s}(q)I_{k,a}(q) + (j-1)I_{s,k+1}(q)I_{s,k}(q)], \quad k = \bar{n}' - \mu, \quad s = \bar{n} - \bar{l}. \quad (29)$$

Отсюда, учитывая поведение $Q_{jj'}$ при $q = 0, \infty$, найдем

$$Q_{jj'} = j' - 1 + (-1)^{j'-1} \left[(2-j) \int_q^{\infty} \sqrt{\frac{k+1}{y}} I_{k+1,s}(y) I_{k,s}(y) dy + (j-1) \int_0^q \sqrt{\frac{k+1}{y}} I_{s,k+1}(y) I_{s,k}(y) dy \right]. \quad (30)$$

Из (30) снова видим, что при $\mu = 0$ (когда зависимость эффективных квантовых чисел от j' исчезает и (I.4.22) выполняется), воспроизводится результат (28).

Выражения (22), (24) и (30) достаточно сложные и пока не найден метод точного интегрирования этих выражений по углу θ и суммирования по гармоникам ν . В теории синхротронного излучения был разработан метод аппроксимации функций Лагерра функциями Макдональда $K_{1/3}$ и $K_{2/3}$ (см. [4]), позволивший проанализировать спектрально-угловое распределение синхротронного излучения в ультрарелятивистском случае. К сожалению, напрямую этот метод при

$\mu > 0$ неприменим. Дело в том, что аппроксимация $I_{n,m}(q)$ через функцию $K_{1/3}$ справедлива лишь при целом индексе m . Если m – нецелое (что у нас имеет место), то следует в аппроксимации использовать функцию $I_{1/3}$ (что можно сделать!), но тогда при больших ν (формально при $\nu \rightarrow \infty$, что в синхротронном излучении не приводило к недоразумениям ввиду быстрого убывания $K_{1/3}$ в этом пределе), соответствующие интегралы начинают расходиться и эти аппроксимации неприменимы.

5 Анализ мощности излучения в приближении слабого магнитного поля

Сравнительно просто анализируется случай слабого магнитного поля. Считаем $H \ll H_0$, что в современных лабораторных условиях заведомо выполняется. Считаем также справедливым условие

$$2\gamma\bar{\nu}K_j^{-2} = 2\frac{H}{H_0}\left(\frac{m_0c^2}{E_j}\right)^2\bar{\nu} \ll 1. \quad (31)$$

Поскольку эффективно излучаемая в релятивистском случае гармоника $\bar{\nu} \sim \left(\frac{E_j}{m_0c^2}\right)^3$, то имеем

$$2\frac{H}{H_0}\frac{E_j}{m_0c^2} \ll 1, \quad (32)$$

что (как известно [4]) означает малость квантовых поправок в релятивистском случае (но не в нерелятивистском приближении (!), ибо в нерелятивистском приближении эффективно излучается гармоника $\bar{\nu} \sim 1$ и (31) выполнено, если $H \ll H_0$). Практически условие (32) также всегда выполняется. В этих предположениях для величины q (14) найдем

$$q = \frac{1}{2}\frac{H}{H_0}\left(\frac{m_0c^2}{E_j}\right)^2\bar{\nu}^2\sin^2\theta. \quad (33)$$

Если номера излучаемых гармоник невелики, то можно считать

$$q \ll 1. \quad (34)$$

Именно критерий (34) мы будем считать выполненным и именно этот случай будем рассматривать как приближение слабого поля. В ультрарелятивистском случае, когда $\nu \sim \left(\frac{E_j}{m_0c^2}\right)^3$, для q надем

$$q \sim \frac{H}{H_0}\left(\frac{E_j}{m_0c^2}\right)^4$$

и q может быть не мало. Этот случай в данной части работы не рассматривается.

Мощность излучения при $q \ll 1$ представим в виде

$$W_j = W_j^{cl}\bar{W}_j, \quad W_j^{cl} = \frac{2}{3}\frac{e^4H^2\beta_j^2(1-\beta_j^2)}{m_0^2c^3}, \quad (35)$$

$$\bar{W}_j = \sum_{j'}\bar{W}_{jj'}, \quad \bar{W}_{jj'} = \frac{3}{4(2\bar{n}+1)}\int_0^\pi\sin\theta d\theta S_{jj'}^2 \sum_\nu\bar{\nu}^2R_{jj'} \quad (36)$$

$$S_{11} = S_{22} = S_{12} = l_2 + l_3\cos\theta = S, \quad S_{21} = l_2 - l_3\cos\theta = \bar{S}. \quad (37)$$

Здесь выделена величина W_j^{cl} , представляющая собой мощность излучения на первой гармонике в квазирелятивистском случае (см. [3]). Поляризация излучения характеризуется фактором

$S_{jj'}$. Его особенность состоит в том, что для перехода $2 \rightarrow 1$ знак круговой поляризации противоположен знаку круговой поляризации в остальных случаях. Это может быть способом идентификации той части излучения, которая связана с этим переходом. Величины $R_{jj'}$ вычисляются из точных выражений (22), (24) и (30) в разложении по малой величине q с учетом первых отличных от нуля членов. Такое вычисление приводит к следующим результатам.

Для перехода $1 \rightarrow 1$ найдем

$$R_{11} = \frac{\Gamma(n + \mu + 1)q^{\nu-1}}{\Gamma(n + \mu + 1 - \nu)\Gamma^2(\nu)}, \quad 1 \leq \nu \leq l, \quad (38)$$

$$R_{11} = \frac{\Gamma(n - l + 1)\Gamma(n + \mu + 1)q^{2\nu-l-1}}{\Gamma(n - \nu + 1)(n - \nu + \mu + 1)\Gamma^2(\nu - l + 1)\Gamma^2(\nu)}, \quad l \leq \nu \leq n.$$

Отсюда видим, что эффективно излучается гармоника $\nu = 1$ и при этом для $1 \leq l \leq n$ мощность излучения не зависит от l . Для величины \overline{W}_{11} легко получить

$$\overline{W}_{11} = \frac{2(n + \mu)}{2(n + \mu) + 1} \overline{S^2}, \quad \overline{S^2} = \frac{3}{4}l_2^2 + \frac{1}{4}l_3^2 \quad (39)$$

Мы видим, что излучение поляризовано так, как это имеет место в синхротронном излучении [4] в нерелятивистском случае. С изменением n величина \overline{W}_{11} слабо возрастает,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{W}_{11} = \overline{S^2}. \quad (40)$$

Состояние $l = 0$ здесь выделено в том смысле, что переход из этого состояния подавлен (происходит в следующем порядке по q). Для \overline{W}_{11} при $l = 0$ найдем при $\nu = 1$

$$\overline{W}_{11} = \frac{H}{H_0} \left(\frac{m_0 c^2}{E_1} \right)^2 \frac{3n(n + \mu)}{5(2n + 2\mu + 1)} \left(\frac{5}{6}l_2^2 + \frac{1}{6}l_3^2 \right). \quad (41)$$

Мы видим, что излучение в этом случае обладает заметно более высокой степенью линейной поляризации, чем (39), хотя сама излучаемая мощность мала.

Для переходов $2 \rightarrow 2$ получаем

$$R_{22} = \frac{\Gamma(n + 1)q^{\nu-1}}{\Gamma(n + 1 - \nu)\Gamma^2(\nu)}. \quad (42)$$

И здесь, как и в предыдущем случае, мы видим, что излучение вырождено по квантовому числу $l < 0$ (снятие вырождения происходит в следующих порядках по q), эффективно излучается только первая гармоника, для которой

$$R_{22} = n$$

и для \overline{W}_{22} найдем

$$\overline{W}_{22} = \frac{2n}{2n + 1} \overline{S^2}, \quad (43)$$

что можно получить из (39) при $\mu = 0$ (физически это очевидно).

Для переходов $2 \rightarrow 1$ имеем

$$R_{21} = \frac{\Gamma(n + |l| + 1 - \mu)\Gamma(n - \nu + 1 + \mu)\Gamma^2(1 + \nu - \mu)\mu^2(1 - \mu)^2 q^{|l|-1}}{\Gamma(n - \nu + 1)\Gamma(n + 1)\Gamma^2(|l| + \nu + 1 - \mu)} f^2(\mu). \quad (44)$$

Здесь введена функция $f(\mu)$

$$f(\mu) = \frac{\sin \mu \pi}{\mu(1 - \mu)\pi}, \quad 0 \leq \mu \leq 1, \quad (45)$$

обладающая очевидными свойствами

$$f(\mu) = f(1 - \mu), \quad f(0) = f(1) = 1, \quad f_{\max} \left(\mu = \frac{1}{2} \right) = \frac{4}{\pi} > 1, \quad 1 \leq f(\mu) \leq \frac{4}{\pi}. \quad (46)$$

Видим, что на отрезке $0 \leq \mu \leq 1$ функция $f(\mu)$ слабо отличается от 1.

При этом переходе ситуация значительно отличается от рассмотренных ранее случаев, а именно, эффективно излучение происходит только из состояния $l = -1$, что физически оправдано: при рассматриваемом переходе меняется тип состояния, а при $l = -1$ классическая траектория наиболее близко проходит около находящегося вне орбиты соленоида и поэтому именно из этого состояния перейти в состояние, при котором соленоид окажется внутри траектории, наиболее вероятно. Замечательным является и тот факт, что ограничения на номер излучаемой гармоники не возникают. При $l = -1$ имеем

$$R_{21} = \frac{\Gamma(n+2-\mu)\Gamma(n-\nu+1+\mu)\mu^2(1-\mu)^2}{\Gamma(n+1)\Gamma(n-\nu+1)(\nu-\mu+1)^2} f^2(\mu), \quad (47)$$

и для \overline{W}_{21} найдем

$$\overline{W}_{21} = \frac{2\Gamma(n+2-\mu)\mu^2(1-\mu)^2 M^{21} f^2(\mu)}{(2n+1)\Gamma(n+1) S^2}, \quad (48)$$

$$M^{21} = \sum_{\nu=1}^n M_{\nu}^{21}, \quad M_{\nu}^{21} = \frac{\Gamma(n-\nu+1+\mu)}{\Gamma(n-\nu+1)} \left(\frac{\nu-\mu}{\nu-\mu+1} \right)^2.$$

Отсюда, например, при $n = 1$ получим

$$\overline{W}_{21}(n=1) = \frac{2\mu^2(1-\mu)^4}{3(2-\mu)} f(\mu) \overline{S^2}. \quad (49)$$

При больших значениях n получить точное замкнутое выражение для M^{21} нам не удалось. Однако несложно дать двусторонние оценки для возникающих сумм. Покажем, как это сделать, на типичном примере. Рассмотрим

$$\sum_{\nu=0}^n \frac{\Gamma(n+2-\mu-\nu)}{\Gamma(n+1-\nu)} \left(\frac{\mu+\nu}{\mu+\nu-1} \right)^2 = \frac{\Gamma(n+2-\mu)}{\Gamma(n+1)} \frac{\mu^2}{(1-\mu)^2} + \frac{\Gamma(n+1-\mu)}{\Gamma(n+1)} \frac{n(1+\mu)^2}{\mu^2} + \frac{n(n-1)\Gamma(n-\mu)}{\Gamma(n+1)} \left(\frac{2+\mu}{1+\mu} \right)^2 + \sum_{\nu=3}^n \frac{\Gamma(n+2-\mu-\nu)}{\Gamma(n+1-\nu)} \left(\frac{\mu+\nu}{\mu+\nu-1} \right)^2. \quad (50)$$

Но, при $\nu > 3$ имеем

$$1 < \left(\frac{\mu+\nu}{\mu+\nu-1} \right)^2 < \left(\frac{3+\mu}{2+\mu} \right)^2, \quad (51)$$

что приводит к соотношению

$$\sum_{\nu=3}^n \frac{\Gamma(n+2-\mu-\nu)}{\Gamma(n+1-\nu)} \left(\frac{\mu+\nu}{\mu+\nu-1} \right)^2 = \delta \sum_{\nu=3}^n \frac{\Gamma(n+2-\mu-\nu)}{\Gamma(n+1-\nu)}. \quad (52)$$

Последняя сумма вычисляется точно поскольку известен следующий результат

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{\Gamma(n-\nu+1+\mu)}{\Gamma(n-\nu+1)} = \frac{\Gamma(n+1+\mu)}{(1+\mu)\Gamma(n)}, \quad (53)$$

Для δ имеем двустороннюю оценку

$$1 < \delta < \left(\frac{3+\mu}{2+\mu} \right)^2. \quad (54)$$

Эту оценку при желании всегда можно улучшить, если в (50) точно учесть еще несколько первых членов.

Расчеты, выполненные подобным образом, приводят к следующим результатам для излучаемой мощности

$$\overline{W}_{21} = \frac{2n}{2n+1} R_n(\mu) \mu^2 (1-\mu)^2 \left[\left(\frac{1-\mu}{2-\mu} \right)^2 + (n-1)\delta \right] \overline{S^2}, \quad \frac{1}{2} < \delta < 1, \quad (55)$$

где $R_n(\mu)$ имеет вид

$$\begin{aligned} R_n(\mu) &= \frac{\Gamma(n+\mu)\Gamma(n+2-\mu)}{\Gamma^2(n+1)} f^2(\mu), \\ R_0(\mu) &= \frac{f(\mu)}{\mu}, \quad R_1(\mu) = (2-\mu)f(\mu), \quad R_2 = \frac{1}{4}(1+\mu)(2-\mu)(3-\mu)f(\mu), \dots, \\ \frac{n+1}{n} f^2(\mu) &\geq R_n(\mu) \geq R_n(1) = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = f^2(\mu). \end{aligned} \quad (56)$$

Легко видеть, что величины M_ν^{21} слабо меняются с изменением ν , что означает с физической точки зрения весьма любопытный факт примерно равновероятного излучения по крайней мере нескольких первых гармоник. При $\mu = 0$ величина $\overline{W}_{21} = 0$ и таких переходов нет, также, как их нет и при $\mu \rightarrow 1$ (они есть в следующих порядках по q). Тем самым мы видим, что ненулевая мантисса магнитного потока обеспечивает возможность переходов, запрещенных при $\mu = 0$, и эти переходы при $\mu > 0$ дают примерно одинаковый вклад в мощность излучения при всех (видимо, более точно – при нескольких первых) допустимых гармониках ν . Об этом, в частности, свидетельствует и то обстоятельство, что при больших n имеем $M^{21} \approx n$.

Особо выделим случай $\nu = 1$. Как уже отмечалось ранее, в этом переходе при $\nu = 1$ излучается частота (21), меньшая синхротронной частоты. Для $\nu = 1$ из (48) найдем

$$\overline{W}_{21}(\nu = 1) = \frac{2n}{2n+1} \left(\frac{\mu(1-\mu)^2}{2-\mu} \right)^2 \overline{S^2} R_n(\mu). \quad (57)$$

Таким образом мощность излучения этой частоты находится на уровне классической мощности, умноженной на величину

$$\left(\frac{\mu(1-\mu)^2 f(\mu)}{2-\mu} \right)^2. \quad (58)$$

Наконец, рассмотрим переходы $1 \rightarrow 2$. Для этих переходов получим

$$R_{12} = \frac{\Gamma(n-\nu-\mu+2)\Gamma(n+\mu+1)(\nu+\mu)^2 q^l}{\Gamma(n-l+1)\Gamma(n-\nu+1)\Gamma^2(l-\nu+2-\mu)\Gamma^2(\nu+1+\mu)}. \quad (59)$$

Мы видим, что эффективно переходы осуществляются из состояния $l = 0$, что также, как и в предыдущем случае, физически оправдано. И здесь классическая траектория (охватывающая соленоид в начальном состоянии), проходит от соленоида на минимально возможном расстоянии и переходы со сменой типа состояния наиболее вероятны именно в этом случае. При $l = 0$ найдем

$$\begin{aligned} \overline{W}_{12} &= \frac{2\Gamma(n+1+\mu)\mu^2(1-\mu)^2 f^2(\mu) M^{12}}{(2n+2\mu+1)\Gamma(n+1)} \overline{S^2}, \\ M^{12} &= \sum_{\nu=0}^n M_\nu^{12}, \quad M_\nu^{12} = \frac{\Gamma(n-\nu-\mu+2)}{\Gamma(n-\nu+1)} \left(\frac{\nu+\mu}{\nu+\mu-1} \right)^2. \end{aligned} \quad (60)$$

Главной особенностью здесь, как уже отмечалось, является возможность излучения гармоники $\nu = 0$ (даже в начальном состоянии $n = 0$), запрещенной при $\mu = 0$. Частота такого излучения определяется выражением (20). Для $\nu = 0$ найдем

$$\overline{W}_{12}(\nu = 0) = \mu^4 \frac{2(n+\mu)}{2(n+\mu)+1} R_n(\mu) \quad (61)$$

В частности, при $n = 0$

$$\overline{W}_{12}(\nu = n = 0) = \frac{2\mu^4 f(\mu)}{2\mu + 1} \overline{S^2}. \quad (62)$$

Таким образом, мощность излучения этой частоты, согласно (61), на уровне классической мощности, умноженной на фактор

$$\mu^4 f^2(\mu). \quad (63)$$

В рассматриваемом переходе, как и в предыдущем случае, гармоники различных номеров ν излучаются примерно равновероятно (дают примерно равный вклад в мощность излучения), так как M_ν^{12} в (60) слабо меняется с изменением ν . Вычислить M^{12} точно при любых n нам не удалось. Двусторонняя оценка дает следующий результат

$$\overline{W}_{12} = \frac{2(n + \mu)}{2(n + \mu) + 1} R_n(\mu) \left[\mu^4 + \frac{n(1 - \mu^2)^2}{n + 1 - \mu} + \frac{n(n - 1)\mu^2(1 - \mu)^2\delta}{n + 1 - \mu} \right] \overline{S^2}. \quad (64)$$

При $\mu = 0$ все переходы, кроме $\nu = 1$, исчезают (оставаясь в приближении следующих порядков по q) и целиком связаны, тем самым, с эффектом Ааронова-Бома.

6 Классическое приближение и эффект Ааронова-Бома

В квантовой теории синхротронного излучения было показано (см. [4], стр. 80), что переход к классическому пределу в квантовых формулах для мощности излучения осуществляется путем разложения по малой в классическом пределе величине $\frac{\nu}{n}$ с использованием предельной формулы (I.4.37). Очевидно, что такой переход мы можем осуществить и в нашем случае. Но при этом следует иметь ввиду, что эффективный номер гармоники (9) сохраняет свой вид, поскольку мантисса магнитного потока μ не может быть истолкована в классических терминах. Осуществляя такой переход, получим для классической мощности W_j^{cl}

$$W_j^{cl} = \frac{e^4 H^2 (1 - \beta_j^2)}{m_0^2 c^3} \sum_{\nu, j'} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \bar{\nu}^2 Q_{jj'}^{cl} |F^{cl}|^2. \quad (65)$$

где соответствующие классические величины имеют вид

$$F^{cl} = l_2 \beta_j J'_{jj'}(z) + l_3 \text{tg} \theta J_{jj'}(z), \quad z = \bar{\nu} \beta_j \sin \theta, \quad (66)$$

$$J_{11} = J_{22} = J_{12} = J_{\bar{\nu}}(z), \quad J_{21} = J_{-\bar{\nu}}(z). \quad (67)$$

$$Q_{jj'}^{cl} = \frac{1}{2} + (-1)^{j+j'} \int_z^\infty dy [(2 - j) J_{l-\bar{\nu}+1}(y) J_{l-\bar{\nu}}(y) + (j - 1) J_{|l+\bar{\nu}}(y) J_{|l+\bar{\nu}-1}(y)]. \quad (68)$$

Здесь через $J_l(z)$ обозначены функции Бесселя. При $\mu = 0$ в $|F^{cl}|^2$ исчезает зависимость от j' и в этом случае

$$\sum_{j'=1,2} Q_{jj'}^{cl} = 1, \quad (69)$$

что приводит к известному [3] классическому выражению для спектрально-углового распределения излучения. Выражения $Q_{jj'}^{cl}$ для конкретных j, j' можно записать в более удобной форме

$$Q_{11}^{cl} = \begin{cases} 1 - \int_0^z J_{l-\nu+1}(y) J_{l-\nu}(y) dy, & l \geq \nu, \\ \int_0^z J_{\nu-l-1}(y) J_{\nu-l}(y) dy, & l < \nu, \end{cases} \quad (70)$$

$$Q_{12}^{cl} = \begin{cases} \int_0^z J_{l-\nu+1-\mu}(y) J_{l-\nu-\mu}(y) dy, & l \geq \nu, \\ \frac{1}{2} - \int_z^\infty J_{l-\nu+1-\mu}(y) J_{l-\nu-\mu}(y) dy, & l < \nu, \end{cases} \quad (71)$$

$$Q_{22}^{cl} = 1 - \int_0^z J_{|l|+\nu}(y) J_{|l|+\nu-1}(y) dy, \quad (72)$$

$$Q_{21}^{cl} = \int_0^z J_{|l|+\nu-\mu}(y) J_{|l|+\nu-1-\mu}(y) dy. \quad (73)$$

Отсюда, в частности, в нерелятивистском приближении несложно получить

$$W_j^{cl} = W^{cl} S^2 \sum_{j'} \overline{W}_{jj'}^{cl}, \quad \overline{W}_{jj}^{cl} = 1, \quad \overline{W}_{12}^{cl} = \mu^4 f^2(\mu), \quad (74)$$

$$\overline{W}_{21}^{cl} = \left(\frac{\mu(1-\mu)^2 f(\mu)}{2-\mu} \right)^2,$$

причем для переходов $1 \rightarrow 2$ выбрано $l = \nu = 0$ и для переходов $2 \rightarrow 1$ выбрано $|l| = \nu = 1$. Выражения (74) точно соответствуют результатам квантовой теории (40), (43), (58), (61) в пределе $n \rightarrow \infty$. Поскольку квантовые числа l – целые, то они никак не могут быть устранены из классических по существу выражений (70)-(73) и, следовательно, вырождение по числу l мощности излучения снимается и в классическом пределе. Число l в силу формулы (I.1.17) может быть связано с классическим выражением, характеризующим минимальное расстояние между классической траекторией и соленоидом

$$\hbar(l + \mu) = \frac{eH}{2c} (R^2 - R_0^2). \quad (75)$$

Соответственно, если фиксирована классическая правая часть выражения (75), то при $\hbar \rightarrow 0$ следовало бы считать $|l| \sim \frac{1}{\hbar} \rightarrow \infty$. Но тогда из (70)-(73) следует, что

$$Q_{jj'}^{cl} = \delta_{jj'}. \quad (76)$$

Этот вывод физически вполне понятен. В классике не учитывается обратная реакция излучения, траектория движения считается заданной и смены типа состояния не может происходить. Подчеркнем ещё раз, что классические по форме выражения (65)-(73), справедливые в предположении $\frac{\nu}{n} \ll 1$ (что во всех практически интересных случаях выполняется), тем не менее, несут на себе нетривиальные следы квантовой теории. В частности, при $\mu = 0$ они позволяют дать классическую оценку вкладов переходов в синхротронном излучении при различных начальных квантовых числах l , связанных со сменой типа состояния (ведь смена типа состояния происходит и при $\mu = 0$).

Классические формулы (70)-(73) позволяют определить общий характер зависимости от l излучаемой мощности. Несложно найти равенства

$$Q_{11}^{cl} = \sum_{k=-\infty}^{l-\nu} J_k^2(z), \quad Q_{12}^{cl} = \sum_{k=l-\nu+1}^{\infty} J_{k-\mu}^2(z),$$

$$Q_{22}^{cl} = \sum_{k=-\infty}^{|l|+\nu-1} J_k^2(z), \quad Q_{21}^{cl} = \sum_{k=|l|+\nu}^{\infty} J_{k-\mu}^2(z), \quad (77)$$

из которых с очевидностью следует, что Q_{11}^{cl} и Q_{22}^{cl} монотонно возрастают с ростом абсолютного значения l , причем

$$\lim_{|l| \rightarrow \infty} Q_{jj}^{cl} = 1, \quad (78)$$

а величины Q_{12}^{cl} и Q_{21}^{cl} монотонно убывают (до нуля при $|l| \rightarrow \infty$) с ростом $|l|$. Таким образом, при малых квантовых поправках эффект Ааронова-Бома в синхротронном излучении проявляется максимальным образом в начальных состояниях $l = 0, -1$.

7 Точные выражения для мощности излучения электрона, движущегося в суперпозиции однородного магнитного и соленоидального полей

Точные решения уравнения Дирака для электрона в однородном магнитном поле при наличии соленоидального магнитного поля (поля Ааронова-Бома) найдены в [1]. Также, как и в случае бесспиновой частицы, для электрона происходит частичное снятие вырождения энергетического спектра по орбитальному квантовому числу l и возникают два типа состояний ($j = 1, 2$). В соответствии с этим меняется спектральный состав излучения. В частности, возникает излучение сверхнизких частот (20) и (21). Качественный анализ частотного состава спектра, проведенный в разделе 2, не связан с наличием спина частицы и целиком может быть отнесен к электрону. Возникающие количественные различия описываются формулой (11) для частоты излучения электрона.

Характеристики спонтанного излучения электрона известным образом [4] выражаются через матричные элементы оператора $\vec{\alpha} \exp[-i(\vec{\alpha}\vec{r})]$. Вычисление матричных элементов по волновым функциям из [1] может быть произведено точно. Существенным моментом является возможность явно учесть зависимость характеристик излучения от ориентации начального и конечного спинов электрона. Наиболее интересной является ориентация спина на направление магнитного поля (физически выделенное направление). Такую ориентацию спина наиболее просто описать, задавая спинор v в (I.3.15) в виде

$$v = v_\zeta = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \zeta \\ 1 - \zeta \end{pmatrix}, \quad \zeta = \pm 1. \quad (79)$$

Здесь $\zeta = 1$ соответствует ориентации спина по направлению внешнего магнитного поля, $\zeta = -1$ соответствует ориентации спина против поля.

Мощность излучения естественным образом разбивается на две части - излучение, не сопровождающееся изменением ориентации спина (переходы без переворота спина); излучение, при котором спин меняет свою ориентацию (переходы с переворотом спина, spin-flip).

Точное выражение для спектрально-углового распределения мощности излучения электрона с учетом поляризации излучения и ориентации электронного спина может быть записано в виде

$$W_j = W_0 \left(\frac{H}{H_0} \right)^2 \varepsilon_j \int_0^\pi d\theta \sin\theta \sum_{\nu, j', \zeta'} Q_{jj'} [1 - 2p_j (\bar{\nu} + q)]^{-1} \frac{(\bar{\nu} + q)^3}{\bar{\nu} - q} |F_{jj'}|^2. \quad (80)$$

В (80) введены величины

$$\varepsilon_j = 1 - \beta_j^2 = \left(\frac{m}{K_j} \right)^2 = \left(\frac{m_0 c^2}{E_j} \right)^2, \quad p_j = \frac{1}{2} \frac{H}{H_0} \frac{\varepsilon_j}{1 + \sqrt{\varepsilon_j}}. \quad (81)$$

Величина $Q_{jj'}$, связана с суммированием по конечным орбитальным квантовым числам. Замечательным является то, что для электрона $Q_{jj'}$ точно совпадает с выражением (25) для бесспиновой частицы и все выводы раздела 3 в этой части целиком переносятся на рассматриваемый здесь случай.

Величину $F_{jj'}$ для электрона можно записать в следующем виде

$$F_{jj'} = l_2 F_{jj'}^{(2)} + l_3 F_{jj'}^{(3)}, \quad F_{jj'}^{(2)} = \sqrt{\frac{H}{H_0} \frac{\varepsilon_j}{2q}} \left[\delta_{\zeta, \zeta'} (-1)^{j-1} \left(\frac{1+\zeta}{2} A_+^j + \frac{1-\zeta}{2} A_-^j \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +\delta_{\zeta,-\zeta'} q \operatorname{ctg} \theta \left(\frac{1+\zeta}{2} \chi_+^j + \frac{1-\zeta}{2} \chi_-^j \right) \Big], F_{jj'}^{(3)} = \delta_{\zeta,\zeta'} (-1)^{j-1} \operatorname{ctg} \theta \times \\
& \times \left(\frac{1+\zeta}{2} B_+^j + \frac{1-\zeta}{2} B_-^j \right) + \delta_{\zeta,-\zeta'} p_j \left[(-1)^{j-1} \frac{1+\zeta}{2} C_+^j + \frac{1-\zeta}{2} C_-^j \right], \quad (82)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
A_{\pm}^j &= 2q [1 - p_j (\bar{\nu} + q)] \frac{d\varphi_{\pm}^j}{dq} \mp [q - p_j (\bar{\nu} + q)^2] \varphi_{\pm}^j \\
B_{\pm}^j &= [1 - p_j (\bar{\nu} + q)] \varphi_{\pm}^j + 2qp_j \frac{d\varphi_{\pm}^j}{dq}, \quad C_{\pm}^j = [1 \pm \sqrt{\varepsilon_j} (\bar{\nu} + q)] \chi_{\pm}^j + 2q \frac{d\chi_{\pm}^j}{dq}, \\
\varphi_+^1 &= I_{\bar{n}-1, \bar{n}'-1}(q), \quad \varphi_+^2 = I_{\bar{n}-1, \bar{n}-1}(q), \quad \varphi_-^1 = I_{\bar{n}, \bar{n}'}(q), \quad \varphi_-^2 = I_{\bar{n}', \bar{n}}(q), \\
\chi_+^1 &= I_{\bar{n}-1, \bar{n}'}(q), \quad \chi_+^2 = I_{\bar{n}', \bar{n}-1}(q), \quad \chi_-^1 = I_{\bar{n}, \bar{n}'-1}(q), \quad \chi_-^2 = I_{\bar{n}'-1, \bar{n}}(q).
\end{aligned}$$

Здесь штрихами обозначены конечные квантовые числа. Величины l_2 и l_3 характеризуют поляризацию излучения; произведено разбиение на части без переворота спина ($\sim \delta_{\zeta,\zeta'}$) и с переворотом спина ($\sim \delta_{\zeta,-\zeta'}$); $I_{n,n'}(x)$ - функции Лагерра.

Состояние $n = 0$ является особым: при $j = 2$ в этом состоянии спин ориентирован только против поля. Следовательно, переходы в это состояние также носят особый характер: без переворота спина возможны только из состояния $\zeta = -1$ ($A_+^j = B_+^j = \varphi_+^j = 0$), а с переворотом спина только из состояний $\zeta = 1$ ($C_-^j = \chi_-^j = 0$). При $j = 1$ это единственное состояние, волновая функция которого не ограничена (обращается в ∞ при $r = 0$, оставаясь однако квадратично интегрируемой). Один из таких переходов ниже будет изучен отдельно.

Из (82) следует, что остается справедливым основной вывод: мощность излучения зависит только от мантиссы магнитного потока соленоидального поля, но не от его абсолютной величины.

Рассматриваемое излучение не обладает преимущественной круговой поляризацией, полные (проинтегрированные по углам) излучаемые мощности правой и левой круговых поляризаций одинаковы, как и для бесспиновой частицы. Однако, как это следует из (82) и свойств функций Лагерра, при переходе $2 \rightarrow 1$ и при переходе $2 \rightarrow 2$ с переворотом спина при начальной ориентации спина $\zeta = 1$ знак круговой поляризации противоположен ее знаку при всех других переходах. В дальнейшем будем анализировать только линейную поляризацию излучения.

8 Анализ особенностей излучения в приближении слабого однородного магнитного поля

Рассмотрим случай слабого однородного магнитного поля. Магнитное поле мы называем слабым, если $q \ll 1$ и начальные квантовые числа не слишком велики (так, что частица остается нерелятивистской). В этом приближении основной вклад в излучение вносят переходы без переворота спина. Переходы с переворотом спина вносят вклад $\sim H/H_0 \ll 1$, к основному, а в некоторых случаях (выделенных ниже) и в более высоких порядках по H/H_0 . Во всех случаях мы ограничимся получением первого в разложении по H/H_0 ненулевого члена.

Рассмотрим часть излучения, обусловленную переходами без изменения типа состояния ($j = j'$). В этом случае основной вклад в излучение дают переходы $\nu = 1, l' = l - 1$. Если начальное орбитальное квантовое число $l \neq 0$, то для излучаемой мощности найдем

$$\begin{aligned}
W_j &= W_j^{\text{cl}} \left\{ \delta_{\zeta,\zeta'} \left(\frac{1+\zeta}{2} \frac{\bar{n}-1}{\bar{n}} + \frac{1+\zeta}{2} \right) S_0 + \right. \\
& \left. + \delta_{\zeta,-\zeta'} \left[\frac{1+\zeta}{2} \frac{H}{H_0} \frac{S_1}{2\bar{n}} + \frac{1-\zeta}{2} \left(\frac{H}{H_0} \right)^3 \frac{\bar{n}-1}{70} S_2 \right] \right\}. \quad (83)
\end{aligned}$$

Здесь через W_j^{cl} обозначено классическое выражение для мощности синхротронного излучения в квазирелятивистском случае (35) и введены факторы, характеризующие линейную поляризацию излучения

$$S_0 = \frac{3}{4}l_2^2 + \frac{1}{4}l_3^2, \quad S_1 = \frac{1}{4}l_2^2 + \frac{3}{4}l_3^2, \quad S_2 = \frac{1}{8}l_2^2 + \frac{7}{8}l_3^2. \quad (84)$$

Из (83) следует, что переходы с переворотом спина дают вклад $\sim H/H_0$ к основному при $\zeta = 1$ и вклад $\sim (H/H_0)^3$ при $\zeta = -1$, т.е. состояние $\zeta = -1$ является более устойчивым и возникает явление радиационной самополяризации (Self-polarization) электронов [4]. Эффект Ааронова-Бома проявляется здесь лишь в том, что эффективное квантовое число \bar{n} не всегда целое: при $j = 1$, $\bar{n} = n + \mu$. Из (83) также следует, что излучение обладает сильной линейной поляризацией, причем в излучении с переворотом спина при $\zeta = 1$ компоненты линейной поляризации меняются местами по отношению к излучению без переворота спина, а при $\zeta = -1$ линейная поляризация излучения с переворотом спина воспроизводит (с перестановкой σ и π -компонент) линейную поляризацию излучения в релятивистском случае [4]. Без учета поляризации излучения при $\mu = 0$ выражения (83) были известны ранее [9,10].

Если в начальном состоянии $l = 0$, то переход без изменения типа состояния подавлен и происходит в следующих порядках по H/H_0 . Например, для переходов без переворотов спина при $l = 0$ найдем

$$W = W^{\text{cl}} \frac{H}{H_0} \frac{3n(1-\beta^2)}{10} \left(\frac{1+\zeta}{2} \frac{n+\mu-1}{n+\mu} + \frac{1-\zeta}{2} \right) \left(\frac{5}{6}l_2^2 + \frac{1}{6}l_3^2 \right). \quad (85)$$

Как видим, поляризация излучения в этом случае отличается от всех предыдущих, что может служить способом идентификации этого перехода.

Наиболее интересными точки зрения проявления эффекта Ааронова-Бома являются переходы с изменением типа состояния. Главной особенностью этих переходов является то, что они осуществляются (в низшем возможном порядке по H/H_0) только из состояния $l = 0$ в состояние $l' = -1$ (переход $1 \rightarrow 2$) или из состояния $l = -1$ в $l' = 0$ (переход $2 \rightarrow 1$). Переходы с другими орбитальными квантовыми числами подавлены (происходят в более высоких порядках по H/H_0). При этих переходах не возникает жесткого ограничения на номер излучаемой гармоники. Происходит явление, которое мы назовем квантовой деформацией спектра. Суть явления в том, что примерно равновероятно излучается некоторая группа частот и в спектре нет резко выраженного максимума.

Проследим характерные особенности расчетов на примере перехода $1 \rightarrow 2$ без переворота спина. Выражение для излучаемой мощности в этом случае имеет вид

$$W = W^{\text{cl}} S_0 M_{12} \delta_{\zeta, \zeta'}, \quad (86)$$

где S_0 определено в (84), а безразмерная величина M_{12} является функцией мантиссы магнитного потока, начального спинового квантового числа и номера начального энергетического уровня и имеет вид

$$M_{12} = \mu^2 (1-\mu)^2 f^2(\mu) \frac{\Gamma(n+\mu)}{\Gamma(n+1)} \times \\ \times \sum_{\nu=0}^n \frac{\Gamma(n+2-\mu-\nu)}{\Gamma(n+1-\nu)} \left(\frac{\mu+\nu}{\mu+\nu-1} \right)^2 \left(\frac{1+\zeta}{2} \frac{n-\nu}{n+\mu} + \frac{1-\zeta}{2} \right). \quad (87)$$

В частности, здесь возможен переход $\nu = 0$ с излучением сверхнизкой частоты (20) и для такого перехода имеем

$$M_{12}(\nu = 0) = \mu^4 R_n(\mu) \left(\frac{1+\zeta}{2} \frac{n}{n+\mu} + \frac{1-\zeta}{2} \right), \quad (88)$$

Такой переход возможен даже из состояния $n = 0$, для которого найдем

$$M_{12}(n = 0, \zeta, \mu) = \frac{1-\zeta}{2} \mu^3 f(\mu). \quad (89)$$

Учитывая, что в состоянии $j = 1, n = 0$

$$\beta^2 = 2\mu H/H_0 \quad (90)$$

для излучаемой мощности (86) при $n = 0$ найдем

$$W(n = 0) = \frac{4}{3} \frac{1 - \zeta}{2} W_0 \left(\frac{H}{H_0} \right)^3 \mu^4 f(\mu) S_0. \quad (91)$$

что согласуется также с формулой (62), если учесть, что для бесспиновой частицы в этом состоянии

$$\beta^2 = (1 + 2\mu) H/H_0. \quad (92)$$

При больших значениях n сумму по ν в (87) в компактном виде нам вычислить не удалось, однако несложно дать двусторонние оценки для возникающих сумм, как это было сделано в разделе 5.

Расчеты, выполненные подобным образом, приводят к следующим результатам для излучаемой мощности при переходах со сменой типа состояния без переворота спина

$$W = W^{\text{cl}} R_n(\mu) \left(\frac{1 + \zeta}{2} M^+ + \frac{1 - \zeta}{2} M^- \right) S_0,$$

$$\begin{aligned} M_{12}^+ &= \frac{n}{n + \mu} \left[\mu^4 + \frac{(n - 1)(1 - \mu^2)^2}{n + 1 - \mu} + \frac{(n - 1)(n - 2)\mu^2(1 - \mu)^2}{n + 1 - \mu} \delta_1 \right], \\ M_{12}^- &= \mu^4 + \frac{n(1 - \mu^2)^2}{n + 1 - \mu} + \frac{n(n - 1)\mu^2(1 - \mu)^2}{n + 1 - \mu} \delta_1, \\ M_{21}^+ &= \frac{\mu(1 - \mu)^2 n}{n + \mu - 1} \left[\mu \left(\frac{1 - \mu}{2 - \mu} \right)^2 + (n - 1) \delta_2 \right], \\ M_{21}^- &= \mu^2(1 - \mu)^2 \left[\left(\frac{1 - \mu}{2 - \mu} \right)^2 + (n - 1) \delta_2 \right], \end{aligned} \quad (93)$$

где для величин δ_k , ($k = 1, 2$) имеем двустороннюю оценку

$$1 < \delta_1 < 2, \quad 1/2 < \delta_2 < 1. \quad (94)$$

Существенным моментом является то, что с ростом n величины M_{ij}^\pm при $\mu \neq 0, 1$ возрастают линейно по n (что имеет место и для бесспиновой частицы). При $\mu = 0, 1$ этого роста нет и в этом случае имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{12}^\pm(\mu = 0, 1) = A\delta_{\nu, 1}, \quad A(\mu = 1) = 1, \quad A(\mu = 0) = \frac{n}{n + 1}, \quad M_{21}^\pm(\mu = 0, 1) = 0. \quad (95)$$

Переходы, дающие ненулевой вклад в M_{21}^\pm при $\mu = 0, 1$ осуществляются в более высоких порядках по H/H_0 . Именно такая зависимость мощности излучения от n свидетельствует о том, что при ненулевой мантиссе магнитного потока возникает при переходах со сменой типа состояния примерно равновероятное излучение целой группы частот, причем количество частот в этой группе сравнимо с номером энергетического уровня.

Аналогичные расчеты излучаемой мощности при переходах со сменой типа состояния и перевороте спина дают следующие результаты.

Для переходов $1 \rightarrow 2$

$$W_{12} = W^{\text{cl}} R_n(\mu) \left[\frac{1 + \zeta}{2} \frac{H}{H_0} \frac{S_1}{2(n + \mu)} N_{12}^+ + \frac{1 - \zeta}{2} \left(\frac{H}{H_0} \right)^3 \frac{2n}{35} N_{12}^- \right],$$

$$\begin{aligned}
N_{12}^+ &= \mu^6 + \frac{n(1+\mu)^2(1-\mu^2)^2}{n+1-\mu} + \frac{n(n-1)(n+2)^2\mu^2(1-\mu)^2}{n+1-\mu}\delta_1, \\
N_{12}^- &= \frac{\mu^6}{(1+\mu)^2} \left(\frac{\mu^2}{8}l_2^2 + \frac{7}{8}l_3^2 \right) + \frac{(n-1)(1-\mu^2)^2(1+\mu)^2}{(n+1-\mu)(2+\mu)^2} \left[\frac{(1+\mu)^2}{8}l_2^2 + \frac{7}{8}l_3^2 \right] + \\
&+ \frac{(n-1)(n-2)\mu^2(1-\mu)^2\delta_1}{n+1-\mu} \left[\frac{(n+2)^2}{8}l_2^2 + \frac{7}{8}l_3^2 \right].
\end{aligned} \tag{96}$$

Для переходов $2 \rightarrow 1$

$$\begin{aligned}
W_{21} &= W^{\text{cl}} R_n(\mu) \left[\frac{1+\zeta}{2} \left(\frac{H}{H_0} \right)^3 \frac{2n}{35} N_{21}^+ + \frac{1-\zeta}{2} \frac{H}{H_0} \frac{\mu(1-\mu)^2 S_1}{2(n+\mu-1)} N_{21}^- \right], \\
N_{21}^+ &= \frac{(1-\mu)^6}{(2-\mu)^2} \left[\frac{(1-\mu)^2}{8}l_2^2 + \frac{7}{8}l_3^2 \right] + \frac{(n-1)\mu^2(2-\mu)^4}{(n-1+\mu)(3-\mu)^2} \left[\frac{(2-\mu)^2}{8}l_2^2 + \frac{7}{8}l_3^2 \right] + \\
&+ \frac{(n-1)(n-2)\mu^2(1-\mu)^2\delta_1}{n-1+\mu} \left[\frac{(n+2)^2}{8}l_2^2 + \frac{7}{8}l_3^2 \right], \\
N_{21}^- &= \frac{\mu(1-\mu)^4}{(2-\mu)^2} + (n-1)(n+2)^2\delta_2.
\end{aligned} \tag{97}$$

Здесь рост излучаемой мощности с ростом n еще заметнее. Он пропорционален n^4 , однако и здесь этот рост происходит лишь при $\mu \neq 0, 1$ и его нет при $\mu = 0, 1$. Весьма существенно, на наш взгляд, что поляризация излучения для таких переходов заметно меняется как с изменением μ , так и n .

Но главной (и весьма неожиданной, на наш взгляд) особенностью является потеря устойчивости спина $\zeta = -1$ при переходе $2 \rightarrow 1$. Как следует из (97), при

$$\delta_3 < \mu < 1 - \delta_3, \quad \delta_3 = \frac{n}{3} \frac{H}{H_0}, \tag{98}$$

более устойчивым при этом переходе оказывается спин $\zeta = 1$. Таким образом если электрон находился в начальном состоянии второго типа, то излучение при μ из интервала (98) приводит к возникновению двухфазной системы - электроны в конечном состоянии второго типа получают преимущественный спин против поля, а перешедшие в состояния первого типа приобретают преимущественный спин по полю. Ненулевая мантисса магнитного потока может играть роль фактора, деполаризирующего спин. Деполаризирующая роль мантиссы полностью исчезает при $\mu = 0, 1$.

9 Проявление эффекта Ааронова-Бома в классическом приближении

Несложно, как и в случае бесспиновой частицы, провести аппроксимацию функций Лагерра функциями Бесселя в классическом приближении (что эквивалентно условию $\bar{v}/\bar{n} \ll 1$). В этом приближении мощность излучения может быть записана следующим образом

$$W_j = W_0 \left(\frac{H}{H_0} \right)^2 (1 - \beta_j^2) \sum_{\nu, j'} \int_0^\pi Q_{jj'}^{\text{cl}} |F_{jj'}^{\text{cl}}|^2 \sin \theta d\theta. \tag{99}$$

Величина $Q_{jj'}^{\text{cl}}$ определена формулой (71) или (77), а для $F_{jj'}^{\text{cl}}$ получим

$$F_{jj'}^{\text{cl}} = \beta \delta_{\zeta, \zeta'} F_{jj'}^{(0)\text{cl}} + \delta_{\zeta, -\zeta'} \frac{H}{H_0} \frac{1 - \beta^2}{2} \bar{v} F_{jj'}^{(1)\text{cl}},$$

$$\begin{aligned}
F_{jj'}^{(0)\text{cl}} &= l_2 I'(z) + l_3 \cos \theta \frac{I(z)}{\beta \sin \theta}, \\
F_{jj'}^{(1)\text{cl}} &= (-\zeta)^j l_2 \cos \theta \left[\frac{I(z)}{\beta \sin \theta} + \zeta I'(z) \right] - l_3 \left[\frac{aI(z)}{\beta \sin \theta} + \zeta I'(z) \right], \\
a &= \cos^2 \theta + \sqrt{1 - \beta^2} \sin^2 \theta, \quad z = \bar{\nu} \beta \sin \theta.
\end{aligned} \tag{100}$$

Функции $I(z)$ для различного типа переходов имеют вид

$$\begin{aligned}
I(z) &= J_{\bar{\nu}}(\bar{\nu} \beta \sin \theta), \quad 1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 1 \rightarrow 2, \\
I(z) &= J_{-\bar{\nu}}(\bar{\nu} \beta \sin \theta), \quad 2 \rightarrow 1.
\end{aligned} \tag{101}$$

В нерелятивистском приближении, учитывая, что в этом случае

$$\beta^2 = 2\bar{n}H/H_0, \tag{102}$$

несложно восстановить результаты анализа предыдущего раздела. Из (100) следует, что ненулевая мантисса сохраняет роль деполяризующего фактора при переходах $2 \rightarrow 1$, но при $\mu = 0, 1$ в силу известного свойства

$$J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x),$$

имеющего место только при целых ν , деполяризация спина исчезает. Величина $F_{jj'}^{(0)\text{cl}}$ воспроизводит известное классическое выражение (см. [3], формула (3.21)). Эффект Ааронова-Бома проявляется здесь в полном снятии вырождения мощности излучения по орбитальному квантовому числу l при $\mu \neq 0, 1$, что уже отмечалось в разделе 6.

10 Точный анализ мощности излучения при переходе $1 \rightarrow 2$, $n = 0$.

Проведем анализ точных выражений для мощности излучения при переходе $1 \rightarrow 2$ для электрона, находившегося в начальном состоянии на уровне $n = 0$. В этом случае излучается сверхнизкая частота (20), а волновые функции начального и конечного состояния имеют особенности, отмечавшиеся ранее.

Для величины Q_{12} несложно получить точное выражение

$$Q_{12} = \frac{q^{1-\mu} \exp(-q) \Phi(1, 2 - \mu; q)}{\Gamma(2 - \mu)}, \quad q = \mu \frac{1 - \sqrt{p}}{1 + \sqrt{p}}, \quad p = 1 - \alpha(1 - x^2). \tag{103}$$

Здесь $\Phi(\alpha, \gamma; x)$ - вырожденная гипергеометрическая функция. В данном случае Φ можно выразить через неполную Γ -функцию

$$\Phi(1, 2 - \mu; x) = (1 - \mu) x^{\mu-1} e^x \int_0^x e^{-y} y^{-\mu} dy, \quad \mu < 1. \tag{104}$$

Излучаемая мощность имеет следующее точное выражение

$$\begin{aligned}
W &= W_0 \frac{H}{H_0} (\alpha\mu)^2 f(\mu) G(\alpha, \mu), \quad \alpha = \frac{2\mu H}{H_0 + 2\mu H}, \\
G(\alpha, \mu) &= \int_0^1 \frac{\sqrt{p} + \sqrt{1 - \alpha}}{\sqrt{p}(1 + \sqrt{p})^3} e^{-2q} \Phi(1, 2 - \mu; q) F dx, \\
F &= \delta_{\zeta, \zeta'} \frac{1 - \zeta}{2} [l_2^2 + l_3^2 \psi(x)] + \delta_{\zeta, -\zeta'} \frac{\alpha}{(1 + \sqrt{1 - \alpha})^2} \frac{1 + \zeta}{2} [l_2^2 \psi(x) + l_3^2], \\
\psi(x) &= \frac{x^2 (1 + \sqrt{1 - \alpha})^2}{(\sqrt{p} + \sqrt{1 - \alpha})^2}.
\end{aligned} \tag{105}$$

Зависимость от магнитного поля в функцию $G(\alpha, \mu)$ входит только через величину α

$$0 < \alpha < 1, \alpha \approx 2\mu \frac{H}{H_0} \left(\frac{H}{H_0} \ll 1 \right), \lim_{H \rightarrow \infty} \alpha = 1. \quad (106)$$

Легко видеть, что

$$\alpha = 1 - (m/K)^2 = \beta^2, \quad (107)$$

однако для этого состояния электрона интерпретировать β как его орбитальную скорость (классическая аналогия) неуместно.

Из (105) следует, что в рассматриваемом случае линейная поляризация излучения при переходах без переворота спина и с переворотом спина точно отличаются друг от друга взаимной сменой σ и π -компонент. Если мы в (105) произведем суммирование по состояниям поляризации излучения и конечным спиновым состояниям и усредним по начальным спиновым состояниям, то получим следующее выражение для полной мощности \bar{W} излучения неполяризованного электрона

$$\bar{W} = 2W_0 \frac{H}{H_0} \alpha \mu^2 f(\mu) \int_0^1 \frac{\sqrt{p} + \alpha - 1}{\sqrt{p}(1 + \sqrt{p})^3} e^{-2q} \Phi(1, 2 - \mu; q) dx. \quad (108)$$

В приближении слабого поля ($\alpha \ll 1$) из (105) получим

$$W = \frac{1}{3} W_0 \frac{H}{H_0} (\alpha \mu)^2 f(\mu) \left(\delta_{\zeta, \zeta'} \frac{1 - \zeta}{2} S_0 + \delta_{\zeta, -\zeta'} \frac{\alpha}{4} \frac{1 + \zeta}{2} S_1 \right), \quad (109)$$

что с учетом (106) точно воспроизводит (91) и (96) при $n = 0$. Но здесь возможно рассмотреть и случай сверхсильного поля ($H \gg H_0, \alpha = 1$). В пределе сверхсильного поля несложно получить, что $\psi(x) = 1$ и для излучаемой мощности найдем

$$W = \frac{1}{2} \bar{W} (l_2^2 + l_3^2) \left(\delta_{\zeta, \zeta'} \frac{1 - \zeta}{2} + \delta_{\zeta, -\zeta'} \frac{1 + \zeta}{2} \right),$$

$$\bar{W} = W_0 \frac{H}{H_0} \mu^2 f(\mu) J(\mu), \quad J(\mu) = \int_0^1 (1 + x) e^{-2\mu x} \Phi(1, 2 - \mu; \mu x) dx. \quad (110)$$

Функция $J(\mu)$ — монотонно убывающая при $0 < \mu < 1$. В частности, несложно получить точные значения

$$J(0) = 1,5; \quad J(1) = 2 - \frac{3}{e} \approx 0,896. \quad (111)$$

Таким образом в сверхсильном поле переходы с переворотом и без переворота спина становятся равновероятными, а излучение полностью неполяризовано. Мощность излучения линейно растет с ростом поля.

11 Заключительные замечания

К сожалению, дальнейшие точные аналитические расчеты даже в классическом пределе провести пока не удается. Например, неизвестно, как аналитически сосчитать суммы типа

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} J_{\nu}^2(\nu x) J_{\nu}^2(\nu y) = f(x, y), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad (112)$$

которые возникают в таких расчетах. Неизвестно также аналитическое выражение для сумм типа

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} J_{\bar{\nu}}(\bar{\nu} x) = \varphi_{\mu}(x), \quad \bar{\nu} = \nu + \mu, \quad 0 < x < 1. \quad (113)$$

Эти суммы известны только при $\mu = 0, 1/2$.

Однако можно высказать соображения о характере поведения величин $Q_{jj'}$ в ультрарелятивистском приближении. Опираясь на опыт теории синхротронного излучения [3], можно сказать, что

$$J_\nu(z) \sim \sqrt{\varepsilon}, \quad \varepsilon = 1 - \beta^2 \sin^2 \theta \quad (114)$$

Величина ε в ультрарелятивистском случае имеет порядок

$$\varepsilon \sim \varepsilon_0 = \left(\frac{m_0 c^2}{E} \right)^2. \quad (115)$$

Ввиду наличия тождеств типа

$$\int_0^z J_\nu(y) J_{\nu-1}(y) dy = \nu \int_0^z \frac{J_\nu^2(y)}{y} dy + \frac{1}{2} J_\nu^2(z) \quad (116)$$

и предполагая, что в правой части этого выражения стоят величины одного порядка, мы найдем, что

$$\int_0^z J_\nu(y) J_{\nu-1}(y) dy \sim \varepsilon. \quad (117)$$

Учитывая, что при интегрировании по углам происходит понижение порядка

$$\int_0^\pi \varepsilon^{-s} \sin \theta d\theta \sim \varepsilon_0^{-s+1/2} \quad (118)$$

окончательно приходим к выводу, что в соответствии с (68) в ультрарелятивистском приближении

$$Q_{jj'} = \delta_{jj'} + \sqrt{\varepsilon_0} \alpha_{jj'}, \quad (119)$$

где $\alpha_{jj'}$ – некоторые конечные величины. Иными словами, переходы осуществляются практически без смены типа состояния. Изменение эффективного номера гармоники также не должно наблюдаться ввиду квазинепрерывного характера спектра. Таким образом, в ультрарелятивистском случае проявления эффекта Ааронова-Бома будут сильно подавлены (релятивистски малы по отношению к главным членам). Конечно, эти качественные соображения могут оказаться неприемлемыми при малых орбитальных квантовых числах $|l| = 0, 1, 2, \dots$. Особенности поведения излучения в нерелятивистском случае могут служить в пользу последнего соображения.

Полученные точные выражения для мощности излучения могут служить предметом численного анализа при рассмотрении конкретных переходов (например, переходы на низких уровнях в сильных магнитных полях).

12 Основные физические результаты

Установлено, что проявления эффекта Ааронова-Бома в синхротронном излучении зависят только от мантиссы магнитного потока соленоидального поля, но не от его абсолютной величины и имеют место только при ненулевой мантиссе.

Наиболее яркими проявлениями эффекта Ааронова-Бома являются:

- возможность излучения сверхнизких частот, не излучаемых при нулевой мантиссе;
- квантовая деформация спектра излучения, выражающаяся в равновероятном излучении группы частот даже в слабом однородном поле и при нерелятивистском движении частиц;
- сложная зависимость поляризации излучения от мантиссы магнитного потока и от типов переходов;
- возможность деполаризующего влияния ненулевой мантиссы в известном явлении спиновой радиационной самополяризации электронного пучка.

полное снятие вырождения излучаемой мощности по квантовому числу l , ослабление влияния ненулевой мантиссы магнитного потока с увеличением $|l|$.

Работа поддержана грантами РФФИ, Минобразования России и фондом FAPESP (Бразилия).

Список литературы

- [1] В.Г. Багров, Г.Ф. Копытов, В.Б. Тлячев.
Релятивистский электрон в постоянном магнитном поле и эффект Ааронова-Бома.
Труды Физического общества республики Адыгея, 1999. - N4. - С.6-33.
- [2] V.G. Bagrov, D.M. Gitman.
Exact solutions of relativistic wave equations.
Kluwer Academic Publishers. Dordrecht/Boston/London. 1990, 323 p.
- [3] А.А. Соколов, И.М. Тернов, В.Г. Багров.
Классическая теория синхротронного излучения.
В сборнике "Синхротронное излучение" под ред. А.А. Соколова, И.М. Тернова. – М.: Наука, 1966, с.18-71.
- [4] А.А. Соколов, И.М. Тернов, В.Г. Багров, Р.А. Рзаев.
Квантовая теория излучения релятивистских электронов, движущихся в постоянном и однородном магнитном поле.
В сборнике "Синхротронное излучение" под ред. А.А. Соколова, И.М. Тернова. – М.: Наука, 1966, с. 72-151.
- [5] А.Н. Матвеев.
К вопросу об излучении элементарных частиц, движущихся с релятивистскими скоростями.
Кандидатская диссертация. МГУ. 1954.
- [6] А.А. Соколов, А.Н. Матвеев, И.М. Тернов.
ДАН СССР, 1955, т.102, с.65.
- [7] А.Н. Матвеев.
О роли спина в излучении "светящегося" электрона.
ЖЭТФ, 1956. - Т.31. - N9. - С.479-489.
- [8] В.Г. Багров.
Поляризационные свойства излучения бозона.
Известия ВУЗов. Физика. 1965. - Т.8. - N5. - С.121-127.
- [9] В.Г. Багров, О.Ф. Дорофеев.
Излучение поляризованных электронов, находящихся на низких энергетических уровнях.
Вестник МГУ. Физика, астрономия. 1966. - Т.7. - N2. - С.97-101.
- [10] И.М. Тернов, В.Г. Багров, О.Ф. Дорофеев.
Особенности поведения электронов, движущихся в магнитном поле на низких уровнях.
Известия ВУЗов. Физика. 1968. - Т.11. - N10. - С.63-69.