2004 г. №9

Т р у д ы   Ф О Р А

НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЯДРАМИ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА В КОМПЛЕКСНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

С.Н. Асхабов

Майкопский государственный технологический университет, г. Майкоп

Методом монотонных (по Браудеру-Минти) операторов доказываются теоремы существования и единственности решения для различных классов нелинейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала в комплексных пространствах Лебега.

Пусть $\rho(x)$ есть *неотрицательная* почти всюду конечная и почти всюду отличная от нуля измеримая по Лебегу на числовой оси $\mathbf{R^1} = (-\infty, \infty)$ функция. Обозначим через $L_p(\rho)$, $p \geq 1$, множество всех *комплекснозначных* измеримых на $\mathbf{R^1}$ функций $u(x)$ с конечной нормой

$$||u||_{p,\rho} = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho(x) \cdot |u(x)|^p dx \right)^{1/p} .$$

Через $L_p^+(\rho)$ обозначим множество всех *неотрицательных* функций из $L_p(\rho)$. Если $\rho(x) = 1$, то будем писать $L_p(\mathbf{R^1})$ и $|| \cdot ||_p$, соответственно. Норму в сопряженном с $L_p(\rho)$, $p \in (1, \infty)$, пространстве $L_{p'}(\rho^{1-p'})$, $p' = p/(p-1)$, будем обозначать через $|| \cdot ||_{p',\sigma}$, где $\sigma(x) = \rho^{1-p'}(x)$. Для любых $u(x), v(x) \in L_2(\mathbf{R^1})$ определим *скалярное произведение*:

$$(u, v) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x) \cdot \overline{v(x)}\, dx \,,$$

где черта означает комплексное сопряжение. Обозначим через $C_0^\infty(\mathbf{R^1})$ множество всех комплекснозначных бесконечно дифференцируемых **финитных** функций $u(x)$, т.е. таких, что $u(x) \equiv 0$ в окрестности концов $\mathbf{R^1}$.

Лемма 1. *Пусть* $0 < \alpha < 1$. *Тогда оператор типа потенциала*

$$(I^\alpha u)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)\, dt}{|x-t|^{1-\alpha}}$$

действует из пространства $L_{2/(1+\alpha)}(\mathbf{R^1})$ *в сопряженное с ним пространство* $L_{2/(1-\alpha)}(\mathbf{R^1})$ *и является непрерывным, симметрическим и строго положительным оператором.*

Доказательство. То, что оператор I^α действует из $L_{2/(1+\alpha)}(\mathbf{R^1})$ в сопряженное пространство $L_{2/(1-\alpha)}(\mathbf{R^1})$ и непрерывен следует из следствия 1 [1] теоремы Харди-Литтлвуда, которая справедлива и в случае комплексных пространств Лебега. Докажем, что оператор I^α является положительным в $L_{2/(1+\alpha)}(\mathbf{R^1})$, т.е. выполняется неравенство:

$$Re\, \langle I^\alpha u, u \rangle = Re \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)\, dt}{|x-t|^{1-\alpha}} \right) \cdot \overline{u(x)}\, dx \geq 0 \quad \forall u \in L_{2/(1+\alpha)}(\mathbf{R^1})\,. \tag{1}$$

Считая сначала, что $u \in C_0^\infty(\mathbf{R^1})$ как и при доказательстве теоремы 2 [1], используя известную [2, с. 39] формулу для гамма-функции Эйлера $\Gamma(z) \cdot \cos(\pi \cdot z/2) = \int\limits_0^\infty t^{z-1} \cos t\, dt$, $0 < Re\, z < 1$, аналогично [2, с. 43] имеем

$$\Gamma(1-\alpha) \cdot \sin \frac{\pi \cdot \alpha}{2} \cdot \langle I^\alpha u, u\rangle = \Gamma(1-\alpha) \cdot \sin \frac{\pi \cdot \alpha}{2} \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)\, dt}{|x-t|^{1-\alpha}} \right) \overline{u(x)}\, dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\int\limits_0^\infty \eta^{-\alpha} cos\, [\eta\, (x-t)]\, d\eta \right] u(t)\, dt \right) \overline{u(x)}\, dx =$$

(меняем порядок интегрирования - что возможно так как $u \in C_0^\infty(\mathbf{R^1})$)

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_0^\infty \eta^{-\alpha} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(t)\, \cos\, [\eta\, (x-t)]\, dt \right] d\eta \right) \overline{u(x)}\, dx =$$

$$= \int\limits_0^\infty \eta^{-\alpha} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(t)\, \cos\, [\eta\, (x-t)]\, dt \right] \overline{u(x)}\, dx \right) d\eta =$$

$$= \int\limits_0^\infty \eta^{-\alpha} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\cos\, (\eta\, x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos\, (\eta\, t) \cdot u(t)\, dt + \sin\, (\eta\, x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin\, (\eta\, t) \cdot u(t)\, dt \right] \overline{u(x)}\, dx \right) d\eta =$$

$$= \int\limits_0^\infty \left(\left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos\, (\eta\, x) \cdot u(t)\, dt \right|^2 + \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin\, (\eta\, x) \cdot u(t)\, dt \right|^2 \right) \frac{d\eta}{\eta^\alpha}\, . \qquad (2)$$

Используя равенство (2) и плотность [3, с. 26] класса $C_0^\infty(\mathbf{R^1})$ в $L_{2/(1+\alpha)}(\mathbf{R^1})$, на основании теоремы Банаха получаем, что оператор I^α является положительным, т.е. справедливо неравенство (1). Повторяя далее все рассуждения после формулы (6) из доказательства теоремы 2 [1] убеждаемся, что оператор I^α является строго положительным и симметрическим в пространстве $L_{2/(1+\alpha)}(\mathbf{R^1})$.

Замечание 1. Как видно из доказательства леммы 1, символ Re в (1) можно *опустить*. Этого и следовало ожидать, поскольку хорошо известно [4, с. 189], что скалярное произведение (Ax, x) ***вещественно*** для любого элемента x из комплексного гильбертова пространства H, если $A:\ H \to H$ является линейным ограниченным самосопряженным оператором. Кроме того, нетрудно проверить, что равенство (2) можно переписать в виде:

$$\Gamma(1-\alpha) \cdot \sin \frac{\pi \cdot \alpha}{2} \cdot \langle I^\alpha u, u\rangle = \int\limits_0^\infty \left(\left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot e^{i\,\eta\, t} dt \right|^2 + \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot e^{-i\,\eta\, t} dt \right|^2 \right) \frac{d\eta}{\eta^\alpha}\, . \qquad (3)$$

Обозначим через $\mathbf{C}$ множество всех комплексных чисел. Введем в рассмотрение нелинейный **оператор суперпозиции** (так называемый *оператор Немыцкого*) $(Fu)(x) = F[x, u(x)]$, порожденный комплекснозначной функцией $F(x,z) : \mathbf{R^1} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, удовлетворяющей известным **условиям Каратеодори**: *она измерима по x при каждом фиксированном $z \in \mathbf{C}$ и непрерывна по z почти для всех $x \in \mathbf{R^1}$.*

Теорема 1. *Пусть* $0 < \alpha < 1$, $2 \le p < \infty$ *и* $b(x) \in L_{p \cdot r}(\rho^{-r})$, $r = 2/[p\,(1+\alpha) - 2]$. *Если нелинейность* $F(x,z)$ *удовлетворяет условиям:*

1) *существуют* $c(x) \in L^+_{p'}(\rho^{1-p'})$ *и* $d_1 > 0$ *такие, что для почти всех* $x \in \mathbf{R^1}$ *и любого* $z \in \mathbf{C}$*:* $|F(x,z)| \le c(x) + d_1 \cdot \rho(x) \cdot |z|^{p-1}$ *;*

2) *для почти всех* $x \in \mathbf{R^1}$ *и всех* $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$*:* $Re\left\{[F(x,z_1) - F(x,z_2)] \cdot \overline{[z_1 - z_2]}\right\} \ge 0$ *;*

3) *существуют* $D(x) \in L^+_1(\mathbf{R^1})$ *и* $d_2 > 0$ *такие, что для почти всех* $x \in \mathbf{R^1}$ *и всех* $z \in \mathbf{C}$*:*

$$Re\,\{F(x,z) \cdot \overline{z}\} \ge d_2 \cdot \rho(x) \cdot |z|^p - D(x) \ ,$$

то уравнение

$$F[x,u(x)] + b(x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(s)\,u(s)\,ds}{|x-s|^{1-\alpha}} = f(x)$$

имеет решение $u^*(x) \in L_p(\rho)$ *при любом* $f(x) \in L_{p'}(\rho^{1-p'})$*. Это решение единственно, если* $b(x) \neq 0$ *почти всюду на* $\mathbf{R^1}$*. Кроме того, если условие 3) выполнено при* $D(x) = 0$*, то справедлива оценка:* $||u^*||_{p,\rho} \le \left(d_2^{-1}\,||f||_{p',\sigma}\right)^{1/(p-1)}$*, где* $\sigma = \rho^{1-p'}$*.*

Теорема 2. *Пусть* $1 < p < 2$ *и нелинейность* $F(x,z)$ *удовлетворяет условиям 1)-3) при* $\rho(x) = 1$*. Тогда уравнение*

$$F[x,u(x)] + \lambda \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(s)}{|x-s|^{2\,(p-1)/p}}\,ds = f(x)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(\mathbf{R^1})$ *при любом* $\lambda > 0$ *и любом* $f(x) \in L_{p'}(\mathbf{R^1})$*. Кроме того, если условие 3) выполняется при* $D(x) = 0$ *и* $\rho(x) = 1$*, то справедлива оценка* $||u^*||_p \le \left(d_2^{-1} \cdot ||f||_{p'}\right)^{1/(p-1)}$*.*

Теоремы 1 и 2 доказываются аналогично теоремам 3 и 4 из [1], соответственно. Заметим, что из условий 1)-3) вытекает, что оператор Немыцкого F, порожденный функцией $F(x,z)$, действует непрерывно из пространства $L_p(\rho)$ в сопряженное с ним пространство $L_{p'}(\rho^{1-p'})$ и является монотонным коэрцитивным оператором.

Следующие две теоремы относятся к нелинейным интегральным уравнениям типа Гаммерштейна и доказываются аналогично теоремам 5 и 6 из [1], соответственно.

Теорема 3. *Пусть* $0 < \alpha < 1,\ \ 1 < p \le 2$ *и* $b(x) \in L_{p\cdot q}(\rho^q)$*,* $q = 2/[2 - p(1-\alpha)]$*. Если нелинейность* $F(x,z)$ *удовлетворяет условиям 1), 3) и*

4) *для почти всех* $x \in \mathbf{R^1}$ *и всех* $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ *таких, что* $z_1 \neq z_2$ *выполняется неравенство:*

$$Re\left\{[F(x,z_1) - F(x,z_2)] \cdot \overline{[z_1 - z_2]}\right\} > 0 \ ,$$

то уравнение

$$u(x) + b(x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(s)\,F[s,u(s)]}{|x-s|^{1-\alpha}}\,ds = f(x)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(\rho)$ *при любом* $f(x) \in L_p(\rho)$*. Кроме того, если условия 1) и 3) выполнены при* $c(x) = D(x) = 0$*, то справедлива оценка:* $||u^*||_{p,\rho} \le d_1 \cdot d_2^{-1} \cdot ||f||_{p,\rho}$*.*

Теорема 4. *Пусть $2 < p < \infty$ и нелинейность $F(x,z)$ удовлетворяет условиям 1), 3) и 4) при $\rho(x) = 1$. Тогда при любом $\lambda > 0$ и любом $f(x) \in L_p(\mathbf{R^1})$ уравнение*

$$u(x) + \lambda \cdot \int\limits_{\Gamma} \frac{F[s,u(s)]}{|s-x|^{2/p}}\, ds = f(x)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(\mathbf{R^1})$. Кроме того, если условия 1) и 3) выполнены при $c(x) = D(x) = 0$, то справедлива оценка $||u^*||_p \le d_1 \cdot d_2^{-1} \cdot ||f||_p$.

Рассмотрим, наконец, нелинейные интегральные уравнения с ядрами типа потенциала соответствующие случаю, когда операторы типа потенциала входят в уравнения нелинейно. В этом случае ограничения на нелинейность $F(x,z)$ подбираются таким образом, что порождаемый ею оператор Немыцкого F действует непрерывно из сопряженного пространства $L_{p'}(\rho^{1-p'})$ в пространство $L_p(\rho)$, в котором ищутся решения.

Теорема 5. *Пусть $2 \le p < \infty$ и функция $b(x) \in L_{p\cdot r}(\rho^{-r})$, где $r = 2/[p\,(1+\alpha) - 2]$. Если нелинейность $F(x,z)$ удовлетворяет условиям:*

5) *существуют $g(x) \in L_p(\rho)$ и $d_3 > 0$ такие,что для почти всех $x \in \mathbf{R^1}$ и любого $z \in \mathbf{C}$ выполняется неравенство:* $|F(x,z)| \le g(x) + d_3 \cdot \left([\rho(x)]^{-1} \cdot |z|\right)^{1/(p-1)}$;

6) *для почти всех $x \in \mathbf{R^1}$ и всех $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ таких, что $z_1 \ne z_2$ выполняется неравенство:*

$$Re\left\{[F(x,z_1) - F(x,z_2)] \cdot \overline{[z_1 - z_2]}\right\} > 0 \;;$$

7) *существуют $D(x) \in L_1^+(\mathbf{R^1})$ и $d_4 > 0$ такие, что для почти всех $x \in \mathbf{R^1}$ и всех $z \in \mathbf{C}$ выполняется неравенство:* $Re\,\{F(x,z) \cdot \overline{z}\} \ge d_4 \cdot \left([\rho(x)]^{-1} \cdot |z|\right)^{1/(p-1)} \cdot |z| - D(x)\,,$

то уравнение

$$u(x) + F\left[x, b(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{b(s)\,u(s)\,ds}{|x-s|^{1-\alpha}}\right] = f(x)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(\rho)$ при любом $f(x) \in L_p(\rho)$. Кроме того, если в условиях 5) и 7) $g(x) = 0$ и $D(x) = 0$, то:

$$||u^* - f||_{p,\,\rho} \le \left[d_3^p \cdot d_4^{-1} \cdot n(\alpha) \cdot ||b||^2_{p\cdot r,\,-r} \cdot ||f||_{p,\,\rho}\right]^{1/(p-1)}.$$

Теорема 6. *Пусть $1 < p < 2$ и нелинейность $F(x,z)$ удовлетворяет условиям 5)-7) при $\rho(x) = 1$. Тогда уравнение*

$$u(x) + \lambda \cdot F\left[x, \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u(s)}{|x-s|^{2\,(p-1)/p}}\, ds\right] = f(x)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(\mathbf{R^1})$ при любом $\lambda > 0$ и любом $f(x) \in L_p(\mathbf{R^1})$. Кроме того, если в условиях 5) и 7) $g(x) = D(x) = 0$ и $\rho(x) = 1$, то справедлива оценка

$$||u^* - f||_p \le \lambda \cdot \left[d_3^p \cdot d_4^{-1} \cdot n(\alpha) \cdot ||f||_p\right]^{1/(p-1)}.$$

Теоремы 5 и 6 доказываются аналогично теоремам 7 и 8 из [1], соответственно.

Легко видеть, что теоремы 1, 3 и 5 при $p = 2$ охватывают, в частности, и случай линейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала. Что касается теорем 2, 4 и 6, то при $p = 2$ они теряют силу, так как в этом случае получаются расходящиеся в обычном смысле сингулярные интегралы. Отметим, что нелинейным сингулярным интегральным уравнениям в комплексных пространствах Лебега посвящена работа [5]. В связи с этим покажем, что используя аналог леммы 1 можно доказать известный результат об ограниченности в вещественном пространстве $L_2(a, b)$ сингулярного интегрального оператора

$$(Ku)(x) = \int_a^b \frac{\mathcal{K}(x,s)\cdot u(s)}{s-x}\, ds\,,$$

где функция $\mathcal{K}(x, s)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\delta \in (0, 1)$, т.е. такова, что для всех $x_1, x_2, s_1, s_2 \in [a, b]$ существует постоянная $C > 0$ такая, что выполняется неравенство:

$$|\mathcal{K}(x_1,s_1) - \mathcal{K}(x_2,s_2)| \le C\cdot \{|x_1-x_2|^\delta + |s_1-s_2|^\delta\}\,.$$

Пусть $0 < \alpha < 1$ и $u(x) \in L_2(a, b)$ - любая функция. Так как $2/(1 + \alpha) < 2$, то применив интегральное неравенство Гельдера с показателями $p = 1 + \alpha$ и $p' = (1 + \alpha)/\alpha$, получим $\|u\|_{2/(1+\alpha)} \le (b - a)^{\alpha/2}\|u\|_2$. Значит, $u(x) \in L_{2/(1+\alpha)}(a, b)$. Но тогда, в силу следствия 1 из [1], являющегося аналогом леммы 1, $I^\alpha u \in L_{2/(1-\alpha)}(a, b)$ и

$$\|I^\alpha u\|_{2/(1-\alpha)} \le n(\alpha)\cdot\|u\|_{2/(1+\alpha)} \le n(\alpha)\cdot(b-a)^{\alpha/2}\|u\|_2\;,$$

где $n(\alpha)$ - норма оператора типа потенциала I^α, действующего ограниченно из $L_{2/(1+\alpha)}(a, b)$ в $L_{2/(1-\alpha)}(a, b)$. Так как $2 < 2/(1 - \alpha)$ и $I^\alpha u \in L_{2/(1-\alpha)}(a, b)$, то тем более $I^\alpha u \in L_2(a, b)$ и, в силу неравенства Гельдера, $\|I^\alpha u\|_2 \le (b - a)^{\alpha/2}\|I^\alpha u\|_{2/(1-\alpha)}$. Но тогда, в силу предыдущего неравенства, $\|I^\alpha u\|_2 \le (b - a)^\alpha \cdot n(\alpha) \cdot \|u\|_2$, т.е. оператор $I^\alpha : L_2(a, b) \to L_2(a, b)$ и ограничен. Рассмотрим теперь оператор K. Обозначим $M = \sup\limits_{a\le x\le b} |\mathcal{K}(x, x)|$ и $v(x) = \mathcal{K}(x, x) \cdot u(x)$. Тогда, используя интегральное неравенство Минковского, условие Гельдера, доказанную выше оценку $\|I^\delta u\|_2 \le (b - a)^\delta \cdot n(\delta) \cdot \|u\|_2$ и теорему М.Рисса об ограниченности в пространстве $L_2(a, b)$ сингулярного оператора S (получающегося из оператора K при $\mathcal{K}(x, s) = 1$), имеем

$$\|Ku\|_2 = \left(\int_a^b \left|\int_a^b \frac{\mathcal{K}(x,s)-\mathcal{K}(s,s)}{s-x}\,u(s)\,ds + \int_a^b \frac{v(s)}{s-x}\,ds\right|^2 dx\right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\int_a^b \left[\int_a^b \frac{C\cdot|x-s|^\delta}{|s-x|}\cdot|u(s)|\,ds\right]^2 dx\right)^{1/2} + \|Sv\|_2 \le$$

$$\le C\cdot(b-a)^\delta\cdot n(\delta)\cdot\|u\|_2 + \|S\|\cdot\|v\|_2 \le \Big(C\cdot(b-a)^\delta\cdot n(\delta) + M\cdot\|S\|\Big)\cdot\|u\|_2\,.$$

Таким образом, оператор K действует из $L_2(a, b)$ в $L_2(a, b)$ и ограничен.

Литература

1. *Асхабов С.Н.* Нелинейные интегральные уравнения с разностными ядрами // Труды ФОРА. 2003, N8. С. 21-36.

2. *Нахушев А.М.* Элементы дробного исчисления и их применение. - Нальчик: изд-во КБНЦ РАН, 2000. - 299 с.

3. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. - 688 с.

4. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. - 496 с.

5. *Askhabov S.N.* Singular integral equations with monotone nonlinearity in complex Lebesgue spaces // Z. Anal. Anwend. 1992. Vol. 11, N1. P. 77-84.

Nonlinear integral equations with potential type kernels in complex Lebesgue spaces

S.N. Askhabov

By methods of monotone operators theory, existence and uniqueness theorems are proved for some classes of nonlinear integral equations with potential type kernels in complex Lebesgue spaces.

