2000 г. № 5
Труды ФОРА

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЯДРАМИ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА И МОНОТОННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

С.Н. Асхабов

Майкопский государственный технологический институт, г. Майкоп

Используя методы теории монотонных операторов, в вещественных весовых пространствах Лебега доказываются теоремы существования и единственности для некоторых классов нелинейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала, содержащими большие нелинейности, а также получены оценки норм решений.

Используя методы теории монотонных операторов, в весовых вещественных пространствах Лебега докажем теоремы существования и единственности решений для некоторых классов нелинейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала.

1. Определения и вспомогательные утверждения. Пусть E - вещественное рефлексивное банахово пространство и E^* - сопряженное с ним. Обозначим через $\langle y, x\rangle$ значение линейного функционала $y\in E^*$ на элементе $x\in E$. Оператор A, действующий из E в E^*, называется [1]: монотонным, если $\langle Au-Av, u-v\rangle\ge 0$ $\forall u, v\in E$; строго монотонным, если $\langle Au-Av, u-v\rangle > 0$ при $u\neq v$; коэрцитивным, если $\langle Au, u\rangle \ge \gamma(\|u\|)\cdot\|u\|$, где $\gamma(s)$ - вещественная функция неотрицательного аргумента, такая, что $\gamma(s)\to\infty$ при $s\to\infty$. Если A - линейный оператор, то получаем, соответственно, определения положительного, строго положительного и положительно определенного оператора.

Пусть $\rho(x)$ есть неотрицательная почти всюду конечная и почти всюду отличная от нуля измеримая на всей числовой оси $R=(-\infty,+\infty)$ функция. Обозначим через $L_p(\rho)$, $p>1$, множество всех вещественных измеримых на R функций $u(x)$ с конечной нормой $\|u\|=\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho(x)\cdot|u(x)|^p dx\right)^{1/p}$. Известно, что $L_p(\rho)$ есть рефлексивное банахово пространство и $L_p^*(\rho)=L_q(\rho^{1-q})$, где $q=p/(p-1)$. Будем писать $L_p^+(\rho)$, если дополнительно известно, что $u(x)$ является неотрицательной на R функцией. Если $\rho(x)=1$, то будем писать L_p и $\|\cdot\|_p$. Известно [2-4], что оператор типа потенциала (риссов потенциал) $(\Im^\alpha u)(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{u(t)}{|x-t|^{1-\alpha}}dt$ при $0<\alpha<1$ действует из $L_{2/(1+\alpha)}$ в $L_{2/(1-\alpha)}$ и положителен, причем

$$\|\Im^\alpha u\|_{2/(1-\alpha)}\le n(\alpha)\cdot\|u\|_{2/(1+\alpha)} \quad \text{и} \quad \langle\Im^\alpha u, u\rangle\ge 0 \quad \forall u\in L_{2/(1+\alpha)}, \qquad (1)$$

где $n(\alpha)=\|\Im^\alpha\|_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)}$ - норма оператора $\Im^\alpha$.

2. О непрерывности и положительности операторов типа потенциала.

Следующие леммы предоставляют условия, необходимые для доказательства основных результатов, при которых рассматриваемые операторы действуют непрерывно в соответствующие сопряженные пространства и являются положительными.

Лемма 1. Пусть $p\ge 2$, $0<\alpha<1$ и вес $\rho(x)$ таков, что

$$c_{1}(\rho)=\left(\int_{-\infty}^{\infty}[\rho(x)]^{\frac{-2}{p(1+\alpha)-2}}dx\right)^{\frac{p(1+\alpha)-2}{2p}}<\infty. \qquad (2)$$

Тогда оператор $\Im^{\alpha}$ действует из $L_p(\rho)$ в $L_q(\rho^{1-q})$ и положителен. При этом,

$$\left\|\Im^{\alpha}u\right\|_{L_q(\rho^{1-q})}\le c_{1}^{2}(\rho)\cdot n(\alpha)\cdot\left\|u\right\|_{L_p(\rho)} \quad \text{и} \quad \left\langle \Im^{\alpha}u,u\right\rangle\ge 0 \quad \forall u\in L_p(\rho). \qquad (3)$$

Доказательство. В силу условия (2), имеют место непрерывные вложения:

$$L_p(\rho)\subset L_{2/(1+\alpha)} \quad \text{и} \quad L_{2/(1-\alpha)}\subset L_q(\rho^{1-q}), \qquad (4)$$

причем

$$\left\|u\right\|_{L_{2/(1+\alpha)}}\le c_{1}(\rho)\cdot\left\|u\right\|_{L_p(\rho)} \qquad \forall u\in L_p(\rho), \qquad (5)$$

$$\left\|u\right\|_{L_q(\rho^{1-q})}\le c_{1}(\rho)\cdot\left\|u\right\|_{L_{2/(1-\alpha)}} \qquad \forall u\in L_{2/(1-\alpha)}. \qquad (6)$$

(оценки (5) и (6), из которых вытекают вложения (4), получаются применением неравенства Гельдера). Пусть $u\in L_p(\rho)$ - произвольная функция. Тогда, в силу (4) и (1), $u\in L_{2/(1+\alpha)}$ и $\Im^{\alpha}u\in L_{2/(1-\alpha)}$, соответственно. Из (4) следует, что тем более $\Im^{\alpha}u\in L_q(\rho^{1-q})$. Применяя последовательно оценки (6), (1) и (5) легко получаем первое неравенство из (3). Следовательно, оператор $\Im^{\alpha}$ действует непрерывно из $L_p(\rho)$ в $L_q(\rho^{1-q})$. Второе неравенство из (3) вытекает так же из (1), поскольку из того, что $u\in L_p(\rho)$ вытекает, что $u\in L_{2/(1+\alpha)}$ и $\Im^{\alpha}u\in L_{2/(1-\alpha)}$.

Аналогично доказывается следующая

Лемма 2. Пусть $1<p\le 2$, $0<\alpha<1$ и вес $\rho(x)$ таков, что

$$c_{2}(\rho)=\left(\int_{-\infty}^{\infty}[\rho(x)]^{\frac{2}{2-p\cdot(1-\alpha)}}dx\right)^{\frac{2-p\cdot(1-\alpha)}{2p}}<\infty.$$

Тогда оператор $\Im^{\alpha}$ действует из $L_q(\rho^{1-q})$ в $L_p(\rho)$ и положителен. При этом,

$$\left\|\Im^{\alpha}v\right\|_{L_p(\rho)}\le c_{2}^{2}(\rho)\cdot n(\alpha)\cdot\left\|v\right\|_{L_q(\rho^{1-q})} \quad \text{и} \quad \left\langle \Im^{\alpha}v,v\right\rangle\ge 0 \quad \forall v\in L_q(\rho^{1-q}).$$

Лемма 3. Пусть $p\ge 2$, $0<\alpha<1$ и $b(x)\in L_r$, где $r=\dfrac{2p}{p\cdot(1+\alpha)-2}$. Тогда оператор типа потенциала $(B^{\alpha}u)(x)=b(x)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{b(t)\cdot u(t)}{|x-t|^{1-\alpha}}dt$ действует из L_p в L_q и является положительным. При этом

$$\left\|B^{\alpha}u\right\|_q\le n(\alpha)\cdot\left\|b\right\|_r^2\cdot\left\|u\right\|_p \quad \text{и} \quad \left\langle B^{\alpha}u,u\right\rangle\ge 0 \qquad \forall u\in L_p. \qquad (7)$$

Доказательство. Применяя неравенство Гельдера, имеем

$$\left\|b\cdot u\right\|_{2/(1+\alpha)}\le\left\|b\right\|_r\cdot\left\|u\right\|_p \qquad \forall u\in L_p, \qquad (8)$$

т.е. $b(x)\cdot u(x)\in L_{2/(1+\alpha)}$. Но тогда, в силу (1) и (8), $\Im^{\alpha}(b\cdot u)\in L_{2/(1-\alpha)}$ и

$$\left\|\Im^{\alpha}(b\cdot u)\right\|_{2/(1-\alpha)}\le n(\alpha)\cdot\left\|b\cdot u\right\|_{2/(1+\alpha)}\le n(\alpha)\cdot\left\|b\right\|_r\left\|u\right\|_p \qquad \forall u\in L_p. \qquad (9)$$

Покажем теперь, что $B^{\alpha}u \in L_q$. Применяя неравенство Гельдера, имеем:

$$\left\| B^{\alpha}u \right\|_q \leq \left\| b \right\|_r \cdot \left\| \Im^{\alpha}(b \cdot u) \right\|_{2/(1-\alpha)}. \tag{10}$$

Из оценок (10) и (9) непосредственно вытекает первое неравенство из (7). Следовательно, оператор B^{α} действует непрерывно из L_p в L_q. Наконец, замечая, что $b \cdot u \in L_{2/(1+\alpha)}$ и $\left\langle B^{\alpha}u, u \right\rangle = \left\langle \Im^{\alpha}(b \cdot u), b \cdot u \right\rangle \quad \forall u \in L_p$, из (1) получаем, что оператор B^{α} является положительным.

3. Теоремы существования и единственности. Оценки решений. Доказываемые ниже теоремы являются аналогами результатов, полученных в [5], [6] для соответствующих нелинейных сингулярных интегральных уравнений и уравнений типа свертки. Будем, как обычно, предполагать, что функция $F(x,t): R \times R \to R$ удовлетворяет условиям Каратеодори: она измерима по x почти при каждом фиксированном t и почти при всех x непрерывна по t. Обозначим через F оператор Немыцкого (оператор суперпозиции), порожденный этой функцией: $Fu = F[x, u(x)]$.

Теорема 1. Пусть $p \geq 2$, $0 < \alpha < 1$ и выполнено условие (2). Если

1) $|F(x,t)| \leq w(x) + d_1 \rho(x) \cdot |t|^{p-1}$, где $w \in L_q^+(\rho^{1-q})$, $d_1 > 0$;

2) $F(x,t)$ не убывает по t почти при каждом фиксированном x;

3) $F(x,t) \cdot t \geq d_2 \rho(x) \cdot |t|^p - D(x)$, где $D \in L_1$, $d_2 > 0$;

то уравнение

$$F[x, u(x)] + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(s)\, ds}{|x-s|^{1-\alpha}} = f(x) \tag{11}$$

имеет решение $u^* \in L_p(\rho)$ при любом $f \in L_q(\rho^{1-q})$. Это решение единственно, если $F(x,t)$ строго возрастает по t.

Доказательство. Запишем уравнение (11) в операторном виде: $Au = f$, где $A = F + \Im^{\alpha}$. Из условий 1)-3) вытекает соответственно, что оператор Немыцкого F действует непрерывно из $L_p(\rho)$ в $L_q(\rho^{1-q})$, монотонен и коэрцитивен. Значит, в силу леммы 1, оператор A удовлетворяет всем требованиям основной теоремы (Браудера-Минти) [1] теории монотонных операторов из которой и вытекают доказываемые утверждения.

Так же как и в [6], можно показать, что в условиях теоремы 1 при $D = 0$ имеет место оценка: $\left\| u^* \right\|_{L_p(\rho)} \leq d_2^{-1} \| f \|_{L_q(\rho^{1-q})}$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия леммы 2. Если $F(x,t)$ удовлетворяет условиям 1)-3) со строгим возрастанием по t, то уравнение

$$u(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F[s, u(s)]}{|x-s|^{1-\alpha}}\, ds = f(x) \tag{12}$$

имеет единственное решение $u^* \in L_p(\rho)$ при любом $f \in L_p(\rho)$.

Доказательство. Из условий теоремы следует, что оператор F действует непрерывно из $L_p(\rho)$ в $L_q(\rho^{1-q})$, строго монотонен и коэрцитивен. Значит [1], существует обратный оператор F^{-1}, действующий из $L_q(\rho^{1-q})$ в $L_p(\rho)$, хеминепрерывный и строго монотонный. Так же как и в [6] проверяется, что F^{-1} является коэрцитивным оператором. Поэтому, с учетом леммы 2, имеем, что оператор $A = F^{-1} + \Im^{\alpha}$ удовлетворяет всем условиям теоремы Браудера-Минти. Значит, уравнение

$F^{-1}v + \Im^{\alpha} v = f$ имеет единственное решение $v^* \in L_q(\rho^{1-q})$. Но тогда $u^* = F^{-1}v^* \in L_p(\rho)$ является решением уравнения $u + \Im^{\alpha} Fu = f$, т.е. данного уравнения (12), и это решение единственно, в силу строгого возрастания функции $F(x,t)$ по t.

Так же как и в [6], можно показать, что в условиях теоремы 2 при $D = 0$ имеет место оценка: $\left\| u^* \right\|_{L_p(\rho)} \le d_1 d_2^{-1} \| f \|_{L_p(\rho)}$.

Отметим, что в [7] изучено вольтерровское уравнение вида (12) в пространствах Лебега и Орлича.

Теорема 3. Пусть $p \ge 2$, $0 < \alpha < 1$ и выполнено условие (2). Если

4) $| F(x,t) | \le g(x) + d_3 \left(\rho^{-1}(x) \cdot | t | \right)^{1/(p-1)}$, где $g \in L_p^+(\rho)$, $d_3 > 0$;

5) $F(x,t)$ строго возрастает по t почти при каждом фиксированном x;

6) $F(x,t) \cdot t \ge d_4 \left(\rho^{-1}(x) \cdot | t | \right)^{1/(p-1)} | t | - D(x)$, где $D \in L_1$, $d_4 > 0$;

то уравнение

$$u(x) + F\left[x, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(s)\, ds}{| x - s |^{1-\alpha}} \right] = f(x) \tag{13}$$

имеет единственное решение $u^* \in L_p(\rho)$ при любом $f \in L_p(\rho)$.

Доказательство. Из условий теоремы вытекает, что оператор типа потенциала $\Im^{\alpha} : L_p(\rho) \to L_q(\rho^{1-q})$ непрерывен и положителен, а оператор Немыцкого $F : L_q(\rho^{1-q}) \to L_p(\rho)$ непрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Значит, существует хеминепрерывный, строго монотонный и коэрцитивный обратный оператор $F^{-1} : L_p(\rho) \to L_q(\rho^{1-q})$. Запишем данное уравнение (13) в операторном виде: $u + F\, \Im^{\alpha} u = f$. Полагая в нем $u = f - v$ и применяя затем к обеим частям получающегося уравнения оператор F^{-1}, приходим к уравнению:

$$\Phi v = 0, \quad \text{где} \quad \Phi v \equiv F^{-1} v + \Im^{\alpha} v - \Im^{\alpha} f. \tag{14}$$

Поскольку оператор Φ удовлетворяет всем требованиям теоремы Браудера-Минти, то уравнение (14) имеет единственное решение $v^* \in L_p(\rho)$. Но тогда данное уравнение (13) имеет решение $u^* = f - v^* \in L_p(\rho)$ и это решение единственно, в силу условия 5).

Так же как и в [6], можно показать, что в условиях теоремы 3 при $g = 0$ и $D = 0$ имеет место оценка: $\left\| u^* - f \right\|_{L_p(\rho)} \le d_3 d_4^{-1} \| f \|_{L_p(\rho)}$.

Используя лемму 3 вместо леммы 1 и соответствующий аналог леммы 2 для оператора B^{α}, теоремы 1-3 легко распространяются на уравнения (11)-(13) с оператором B^{α} вместо оператора $\Im^{\alpha}$ в случае пространств L_p, при $\rho(x) = 1$.

В заключение отметим, что леммы 1-3 и теоремы 1-3 имеют место и тогда, когда $R = [0, \infty)$ или $R = [a, b]$, причем в последнем случае, аналогично [4], можно показать, что операторы типа потенциала $\Im^{\alpha}$ и B^{α} являются строго положительными в соответствующих пространствах $L_p(\rho)$ и L_p. Последнее обстоятельство, с учетом результатов работ [8], [9], позволяет, в случае $R = [a, b]$, ослабить условия на нелинейность $F(x,t)$ в теоремах 1-3.

Литература

1. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М., 1978.
2. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.
3. *Трикоми Ф.* Лекции по уравнениям в частных производных. М., 1957.
4. *Нахушев А.М.* // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34. № 1. С. 101-109.
5. *Асхабов С.Н.* // Известия вузов. Математика. 1981. № 9. С. 64-66.
6. *Askhabov S.N.* // Z. Anal. Anwend. 1992. Vol. 11. № 1. P. 77-84.
7. *Zabrejko P., Rogosin S.* // J. Electrotecn. and Math. 1997. № 1. P. 53-65.
8. *Brezis H., Browder F.* // Bull. Amer. Math. Soc. 1974. Vol. 90. № 3. P. 567-572.
9. *Brezis H., Browder F.* // Advances in Math. 1975. Vol. 18. № 2. P. 115-147.

Integral equations with potential type kernels and monotone nonlinearity

S.N. Askhabov

By methods of monotone operator theory, existence and uniqueness theorems are proved for some classes of nonlinear integral equations with potential type kernels involving large nonlinearities in weighted real Lebesgue spaces and also norm estimates of solutions are obtained.

