ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

С.Н. Асхабов

Майкопский государственный технологический институт, г. Майкоп

В конусе пространства непрерывных функций рассматриваются уравнения вольтерровского типа с неоднородностью в линейной части, возникающие в теориях фильтрации, ударных волн и других. При широких предположениях относительно неоднородности получены, неулучшаемые в определенном смысле, априорные оценки решений и даны их приложения к исследованию соответствующих нелинейных операторов.

В конусе $\Gamma=\{u(x): u(x)\in C[0;\infty), u(x)\geq 0\ \forall x\geq 0\}$ пространства непрерывных функций рассматриваются уравнения вида

$$u^{\alpha}(x)=\int_0^x k(x,t)\cdot u(t)dt+f(x),\quad \alpha>1,\ x\geq 0, \tag{1}$$

с достаточно гладким ядром $k(x,t)$, возникающие в теории фильтрации, в теории ударных волн и других (см. обзорные работы [1]-[3]). При широких предположениях относительно неоднородности $f(x)$ получены, неулучшаемые в определенном смысле, априорные оценки решений уравнений вида (1) и даны их приложения к исследованию соответствующих нелинейных операторов.

1. Всюду в этом пункте предполагается, что выполнены условия:

1). $k(x,t)$ неотрицательна при $0\leq t\leq x$, непрерывна и не убывает по x;

2). $f(x)\in\Gamma$ и не убывает на $[0,\infty)$.

Лемма 1. Если $g(x)$ - неубывающая на $[0,\infty)$ функция, то

$$\int_0^x k(x,t)\cdot g(t)\,dt\leq\int_0^x\left[k(t,t)+\int_0^t\frac{\partial k(t,s)}{\partial t}\,ds\right]\cdot g(t)\,dt. \tag{2}$$

Для доказательства достаточно заметить, что производная разности левой и правой части (2) не положительна почти всюду на $[0,\infty)$.

В связи с указанными выше приложениями интерес представляют положительные решения уравнения (1), поэтому мы будем разыскивать их в классе:

$$\Gamma_+=\{u(x): u(x)\in C[0;\infty),\ u(x)>0\ \ \forall x>0\}.$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1) и 2). Если $u(x)\in\Gamma_+$ есть решение уравнения (1), то $u(x)$ не убывает на $[0,\infty)$ и для любого $x\in[0,\infty)$:

$$F(x)\leq u(x)\leq G(x), \tag{3}$$

где

$$F(x)\equiv\left[\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^x k(t,t)\,dt+f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(0)\right]^{\frac{1}{\alpha-1}},$$

$$G(x)\equiv\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^x\left[k(t,t)+\int_0^t\frac{\partial k(t,s)}{\partial t}ds\right]dt+f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(x)\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

Доказательство. Так как при $x_1 < x_2$ (ср. [4]): $u^{\alpha}(x_2) - u^{\alpha}(x_1) =$

$$= \int_0^{x_1} \left[k(x_2,t) - k(x_1,t\right] \cdot u(t)\,dt + \int_{x_1}^{x_2} k(x_2,t)\cdot u(t)\,dt + f(x_2) - f(x_1) \geq 0,$$

то не убывание $u(x)$ очевидно.

Докажем оценку сверху из (3). Обозначим, для краткости записи, $\Re(t) = k(t,t) + \int_0^t \frac{\partial k(t,s)}{\partial t}\,ds$. По лемме 1, $u^{\alpha}(x) \leq \int_0^x \Re(t)\cdot u(t)\,dt + f(x)$ или

$$u(x) \leq \left(\int_0^x \Re(t)\cdot u(t)\,dt + f(x) \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad \forall x \geq 0. \tag{4}$$

В силу (4) для почти всех $t \geq 0$ имеем

$$\Re(t)\cdot u(t) + f'(t) \leq \Re(t)\cdot \left(\int_0^t \Re(\tau)\cdot u(\tau)\,d\tau + f(t) \right)^{\frac{1}{\alpha}} + f'(t).$$

Учитывая, что выражение в скобках не меньше, чем $f(t)$, получим

$$\frac{\Re(t)\cdot u(t) + f'(t)}{\left(\int_0^t \Re(\tau)\cdot u(\tau)\,d\tau + f(t) \right)^{\frac{1}{\alpha}}} \leq \Re(t) + \frac{f'(t)}{f^{\frac{1}{\alpha}}(t)}.$$

Интегрируя обе части этого неравенства в пределах от 0 до x, имеем:

$$\frac{\alpha}{\alpha-1}\cdot \left[\left(\int_0^x \Re(\tau)\cdot u(\tau)\,d\tau + f(x) \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} - f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(0) \right] \leq$$

$$\leq \int_0^x \Re(t)\,dt + \frac{\alpha}{\alpha-1}\cdot \left[f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(x) - f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(0) \right]$$

или

$$\left(\int_0^x \Re(\tau)\cdot u(\tau)\,d\tau + f(x) \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \leq \frac{\alpha-1}{\alpha}\cdot \int_0^x \Re(t)\,dt + f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(x) \quad \forall x \geq 0. \tag{5}$$

Из (4) и (5) легко получаем, что $u(x) \leq G(x)$ - что и требовалось.

Докажем, наконец, оценку снизу из (3). Так как $k(x,t) \geq k(t,t)$ и (см. [5]) $\int_0^x f'(t)\,dt \leq f(x) - f(0)$, то $u^{\alpha}(x) \geq \int_0^x k(t,t)\cdot u(t)dt + \int_0^x f'(t)\,dt + f(0)$ или

$$u(x) \geq \left(\int_0^x [k(t,t)\cdot u(t) + f'(t)]dt + f(0) \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad \forall x \geq 0. \tag{6}$$

Из (6) следует, что для почти всех $t \geq 0$

$$k(t,t)\cdot u(t) + f'(t) \geq k(t,t)\cdot \left(\int_0^t [k(s,s)\cdot u(s) + f'(s)]ds + f(0) \right)^{\frac{1}{\alpha}} + f'(t)$$

или, отбрасывая в правой части неотрицательное слагаемое $f'(t)$,

$$\frac{k(t,t)\cdot u(t)+f'(t)}{\left(\int\limits_0^t [k(s,s)\cdot u(s)+f'(s)]ds+f(0)\right)^{\frac{1}{\alpha}}}\ge k(t,t).$$

Интегрируя обе части последнего неравенства в пределах от 0 до x, получим

$$\frac{\alpha}{\alpha-1}\cdot\left[\left(\int\limits_0^t [k(s,s)\cdot u(s)+f'(s)]ds+f(0)\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}-\left(f(0)\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right]\ge\int\limits_0^x k(t,t)\,dt\quad\forall x\ge 0$$

или

$$\left(\int\limits_0^t [k(s,s)\cdot u(s)+f'(s)]ds+f(0)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\ge\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\cdot\int\limits_0^x k(t,t)\,dt+f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(0)\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\equiv F(x).$$

Поэтому, в силу (6), $u(x)\ge F(x)$ - что и требовалось.

Непосредственно из теоремы 1 вытекают следующие следствия.

Следствие 1 ([4], теорема 2, лемма 5). Если $u(x)\in\Gamma_+$ - решение уравнения $u^{\alpha}(x)=\int\limits_0^x k(x-t)\cdot u(t)dt$, то для любого $x\ge 0$

$$\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\cdot k(0+)\cdot x\right)^{1/(\alpha-1)}\le u(x)\le\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^x k(t)\,dt\right)^{1/(\alpha-1)}.$$

Следствие 2 ([6], теорема 4.1). Если $u(x)\in\Gamma_+$ есть решение уравнения $u^{\alpha}(x)=\int\limits_0^x e^{-2t}\left[\frac{1}{2}+(x-t)\right]\cdot u(t)dt$, то для любого $x\ge 0$

$$\left[\frac{\alpha-1}{4\alpha}\left(1-e^{-2x}\right)\right]^{1/(\alpha-1)}\le u(x)\le\left[\frac{\alpha-1}{2\alpha}\cdot x\right]^{1/(\alpha-1)}.$$

Следствие 3 (ср. [7], теорема 8). Если $u(x)\in\Gamma_+$ есть решение уравнения $u^{\alpha}(x)=\int\limits_0^x k(x+t)\cdot u(t)dt$, то для любого $x\ge 0$

$$\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^x k(2t)\,dt\right)^{1/(\alpha-1)}\le u(x)\le\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^x [2k(2t)-k(t)]dt\right)^{1/(\alpha-1)}.$$

Следствие 4 (ср. [8], теорема 1.1). Если $u(x)\in\Gamma_+$ есть решение уравнения $u^{\alpha}(x)=\int\limits_0^x k(x-t)\cdot u(t)dt+f(x)$, то для любого $x\ge 0$

$$\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\cdot k(0+)\cdot x+f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(0)\right)^{1/(\alpha-1)}\le u(x)\le\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^x k(t)\,dt+f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(x)\right)^{1/(\alpha-1)}.$$

Замечания: 1). Оценка сверху в следствии 3 точнее, чем в [7]. 2). Оценка снизу в следствии 4 точнее, чем в [8]. 3). Если $k(x,t)=C_1\ge 0$, а $f(x)=C_2\ge 0$, то нижняя и верхняя априорные оценки в (3) совпадают ($F(x)\equiv G(x)$) и являются решением уравнения (1). 4). Анализ уравнения $u^2(x)=3\int\limits_0^x u(t)dt+x^2$, решением которого является функция $u(x)=2x$, показывает, что в априорных оценках (3) в $F(x)$ вместо $f(0)$ нельзя взять $f(x)$, а в $G(x)$, наоборот, вместо $f(x)$ нельзя взять $f(0)$.

Из теоремы 1 следует, что решения уравнения (1) естественно разыскивать (здесь и далее используется терминология, принятая в [9]) в конусном отрезке $\langle F(x), G(x)\rangle$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1), 2) и $f(x)$ является абсолютно непрерывной функцией. Тогда оператор $(Ku)(x)=\left(\int\limits_0^x k(x,t)u(t)dt+f(x)\right)^{1/\alpha}$ является монотонным в классе Γ_+ и переводит конусный отрезок $\langle F(x), G(x)\rangle$ в себя.

Доказательство. Монотонность оператора K очевидна (см. [9, с. 107]). Достаточно доказать, что $(KF)(x)\ge F(x)$ и $(KG)(x)\le G(x)$.

В силу условий 1) и 2), имеем

$$[(KF)(x)]^\alpha \ge \int\limits_0^x k(t,t)\cdot\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^t k(s,s)\,ds+f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(0)\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}dt+f(0)=$$

$$=\frac{\alpha}{\alpha-1}\cdot\int\limits_0^x\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^t k(s,s)\,ds+f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(0)\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}d\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^t k(s,s)\,ds+f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(0)\right)+f(0)=$$

$$=\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^x k(s,s)\,ds+f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(0)\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\equiv F^\alpha(x)$$

так что $(KF)(x)\ge F(x)$.

Докажем, наконец, что $(KG)(x)\le G(x)$. Обозначим, для краткости записи, $\Re(t)=k(t,t)+\int\limits_0^t\frac{\partial k(t,s)}{\partial t}ds$. Учитывая, что $f(x)=\int\limits_0^x f'(t)\,dt+f(0)$ и применяя лемму 1 при $g(x)=G(x)$, имеем

$$[(KG)(x)]^\alpha=\int\limits_0^x k(x,t)\cdot G(t)\,dt+f(x)\le$$

$$\le\int\limits_0^x\left[k(t,t)+\int\limits_0^t\frac{\partial k(t,s)}{\partial s}ds\right]\cdot G(t)\,dt+\int\limits_0^x f'(t)\,dt+f(0)=$$

$$=\int\limits_0^x G(t)\cdot\left(\Re(t)+\frac{f'(t)}{G(t)}\right)dt+f(0)\le\int\limits_0^x G(t)\cdot\left(\Re(t)+\frac{f'(t)}{f^{\frac{1}{\alpha}}(t)}\right)dt+f(0).$$

Учитывая, что $G(t)=\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\cdot\int\limits_0^t\Re(\tau)\,d\tau+f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(t)\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$, получаем

$$[(KG)(x)]^{\alpha} \le \int_0^x \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \cdot \int_0^t \Re(\tau)\, d\tau + f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(t) \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \left(\Re(t) + f^{-\frac{1}{\alpha}}(t) \cdot f'(t) \right) dt + f(0) =$$

$$= \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \cdot \int_0^x \left(\int_0^t \Re(\tau)\, d\tau + \frac{\alpha}{\alpha-1} f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(t) \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \times$$

$$\times d\left(\int_0^t \Re(\tau)\, d\tau + \frac{\alpha}{\alpha-1} f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(t) \right) + f(0) \equiv [G(x)]^{\alpha}$$

так что $(KG)(x) \le G(x)$. Теорема 2 доказана.

Используя теорему 2 и, например, теорему 3 из [10], можно показать, что уравнение (1) имеет единственное решение в конусном отрезке $\langle F(x), G(x) \rangle$ и что это решение может быть найдено методом последовательных приближений.

2. Рассмотрим в классе Γ_+ нелинейное уравнение типа свертки

$$u^{\alpha}(x) = \int_0^x k(x-t) \cdot u(t) dt + f(x), \quad \alpha > 1, \quad x \ge 0, \tag{7}$$

где ядро $k(x)$ неотрицательно и является почти возрастающим на $[0, \infty)$.

Напомним (см., например, [11]), что неотрицательная на $[0, \infty)$ функция $\varphi(x)$ называется почти возрастающей с константой C_{φ}, если существует постоянная $C_{\varphi} \ge 1$ такая, что $\varphi(x) \le C_{\varphi} \cdot \varphi(y)$ для всех $x, y \in [0, \infty)$ таких, что $x \le y$. При этом под C_{φ} понимается наименьшая из таких постоянных. Следует отметить, что класс почти возрастающих функций существенно шире класса неубывающих ($C_{\varphi} = 1$) функций и принципиально от него отличается по своим дифференциальным свойствам. В частности, почти возрастающими являются некоторые убывающие, немонотонные и всюду разрывные функции (см. [11]).

Из леммы 1 вытекает следующее неравенство, являющееся частным случаем неравенства Чебышева,: $\int_0^x k(x-t) \cdot g(t) dt \le \int_0^x k(t) \cdot g(t) dt$ (см., например, [12, с. 120]). Это простое неравенство оказалось весьма полезным (см. [2], [13]) при исследовании уравнений вида (7). Хорошо известно, что неравенства такого вида имеют место как в дискретном случае одинаково упорядоченных последовательностей [14, с. 59], так и в континуальном случае одинаково упорядоченных функций многих переменных [14, с. 202]. В этой связи вызывают недоумение определения и утверждения из [15, пункты 1-4].

Из неравенства Чебышева легко получить (см. [13]), что

$$\int_0^x k(x-t) \cdot g(t) dt \le C_k \cdot \int_0^x k(t) \cdot g(t) dt, \quad x \ge 0, \tag{8}$$

если $k(x)$ - неотрицательная почти возрастающая функция с константой C_k, а $g(x)$ - неотрицательная неубывающая функция.

Следующая теорема обобщает следствие 4. Заметим, что она не охватывается теоремой 1, так как в ней ядро $k(x)$ может быть нигде не дифференцируемой на $[0, \infty)$ функцией.

Теорема 3. Пусть $\alpha > 1$ и выполнены условия:

3) $k(x)$ почти возрастает с константой C_k на $[0, \infty)$ и $k(0+) > 0$;

4) $f(x) \in \Gamma$ и не убывает на $[0, \infty)$.

Если $u(x)\in \Gamma_+$ есть решение уравнения (7), то $u(x)$ не убывает на $[0,\infty)$ и для любого $x\in[0,\infty)$ удовлетворяет неравенствам

$$L(x)\le u(x)\le R(x), \tag{9}$$

где
$$L(x)\equiv\left[\frac{\alpha-1}{\alpha}\cdot\frac{k(0+)}{C_k}\cdot x+f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(0)\right]^{\frac{1}{\alpha-1}},$$

$$R(x)\equiv\left[\frac{\alpha-1}{\alpha}\cdot C_k\cdot\int_0^x k(t)dt+f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(x)\right]^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

Доказательство. Пусть $x\le y$. Так как $k(x)\le C_k\cdot k(y)$, то

$$C_k\cdot u^\alpha(y)-u^\alpha(x)\equiv C_k\cdot\int_0^y k(y-t)\cdot u(t)dt+C_k\cdot f(y)-\int_0^x k(x-t)\cdot u(t)dt-f(x)\equiv$$

$$\equiv\int_0^x[C_k\cdot k(y-t)-k(x-t)]\cdot u(t)dt+C_k\cdot\int_x^y k(y-t)u(t)dt+C_k\cdot f(y)-f(x)\ge 0.$$

Следовательно, $u(x)\le C_k^{1/\alpha}\cdot u(y)$ при $x\le y$. Аналогично, используя свойство коммутативности свертки, имеем:

$$C_k^{1/\alpha}u^\alpha(y)-u^\alpha(x)\equiv C_k^{1/\alpha}\int_0^y k(t)\,u(y-t)dt+C_k^{1/\alpha}f(y)-\int_0^x k(t)\,u(x-t)dt-f(x)\equiv$$

$$\equiv\int_0^x\left[C_k^{1/\alpha}\cdot u(y-t)-u(x-t)\right]\cdot k(t)dt+C_k^{1/\alpha}\cdot\int_x^y u(y-t)k(t)dt+C_k^{1/\alpha}\cdot f(y)-f(x)\ge 0.$$

Следовательно, $u(x)\le C_k^{1/\alpha^2}\cdot u(y)$ при $x\le y$. Продолжая этот процесс, имеем $u(x)\le C_k^{1/\alpha^n}\cdot u(y)$ $\forall n$. Переходя к пределу при $n\to\infty$ получаем, что $u(x)\le u(y)$ при $x\le y$, т.е. $u(x)$ не убывает на $[0,\infty)$.

1). Докажем, что $u(x)\ge L(x)$. Так как $k(0+)\le C_k\cdot k(x-t)$, то из (7) получаем $u^\alpha(x)\ge\dfrac{k(0+)}{C_k}\cdot\int_0^x u(t)dt+\int_0^x f'(t)dt+f(0)$ или

$$u(x)\ge\left(\int_0^x\left[\frac{k(0+)}{C_k}\cdot u(t)+f'(t)\right]dt+f(0)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\quad\forall\, x\ge 0. \tag{10}$$

Из (10) следует, что для почти всех $t\ge 0$ $\quad\dfrac{k(0+)}{C_k}\cdot u(t)+f'(t)\ge$

$$\ge\frac{k(0+)}{C_k}\cdot\left(\int_0^t\left[\frac{k(0+)}{C_k}\cdot u(\tau)+f'(\tau)\right]d\tau+f(0)\right)^{\frac{1}{\alpha}}+f'(t)$$

или
$$\frac{\frac{k(0+)}{C_k}\cdot u(t)+f'(t)}{\left(\int_0^t\left[\frac{k(0+)}{C_k}\cdot k(0+)u(\tau)+f'(\tau)\right]d\tau+f(0)\right)^{\frac{1}{\alpha}}}\geq\frac{k(0+)}{C_k}.$$

Интегрируя последнее неравенство в пределах от 0 до x, получим

$$\frac{\alpha}{\alpha-1}\left[\left(\int_0^x\left[\frac{k(0+)}{C_k}\cdot u(\tau)+f'(\tau)\right]d\tau+f(0)\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}-\left(f(0)\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right]\geq\frac{k(0+)}{C_k}\cdot x\quad\forall x\geq 0$$

или

$$\left(\int_0^x\left[\frac{k(0+)}{C_k}u(t)+f'(t)\right]dt+f(0)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\geq\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\frac{k(0+)}{C_k}x+f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(0)\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\equiv L(x).\quad(11)$$

Таким образом, оценка $u(x)\geq L(x)$ является следствием неравенств (10) и (11).

2). Докажем, наконец, оценку $u(x)\leq R(x)$. В силу (8), из (7) имеем

$$u(x)\leq\left(C_k\cdot\int_0^x k(t)\cdot u(t)dt+f(x)\right)^{1/\alpha}\qquad\forall x\geq 0,\qquad(12)$$

откуда для почти всех $t\geq 0$ получаем

$$\left(C_k\cdot\int_0^t k(\tau)\cdot u(\tau)d\tau+f(t)\right)^{-1/\alpha}\left(C_k\cdot k(t)u(t)+f'(t)\right)\leq C_k\cdot k(t)+f^{-1/\alpha}(t)\cdot f'(t).$$

Интегрируя это неравенство в пределах от 0 до x, имеем:

$$\left(C_k\cdot\int_0^x k(t)\cdot u(t)dt+f(x)\right)^{1/\alpha}\leq R(x)\quad\forall x\geq 0.$$

Следовательно, в силу (12), тем более $u(x)\leq R(x)\quad\forall x\geq 0$ - что и требовалось.

Теорема 3 полностью доказана.

Заметим, что при $k(x)=C_1\geq 0$ и $f(x)=C_2\geq 0$ нижняя и верхняя априорные оценки в (9) совпадают $(L(x)\equiv R(x))$, поскольку $C_k=1$, и являются решением уравнения (7) – что свидетельствует о точности априорных оценок (9). Для сравнения приведем соответствующие оценки, полученные в [4]:

Теорема 2 [4]. Если $u(x)\in\Gamma_+$ есть решение уравнения (7), то

$$\left[\frac{\alpha-1}{\alpha}k(0+)\,x\right]^{\frac{1}{\alpha-1}}\leq u(x)\leq\left[\int_0^x k(t)dt+\left(\frac{\alpha}{(\alpha-1)k(0+)}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}S(x)\right]^{\frac{1}{\alpha-1}},$$

где $S(x)=\dfrac{f(x)}{x^{\frac{1}{\alpha-1}}}$ - неубывающая выпуклая на $(0,\infty)$ функция, стремящаяся к 0 при $x\to 0+$, а $k(x)$ - неубывающая на $[0,\infty)$ функция такая, что $k(0+)>0$.

Ясно, что оценки (9) значительно точнее и получены при существенно меньших ограничениях на неоднородность $f(x)$ и ядро $k(x)$.

Из теоремы 1 вытекает, что решение уравнения (7) естественно разыскивать в классе
$Q_+ = \{u(x): u(x) \in C[0;\infty), L(x) \le u(x) \le R(x)\}$.

Рассмотрим в классе Q_+ нелинейный оператор свертки

$$(Tu)(x) = \left(\int_0^x k(x-t)u(t)dt + f(x) \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Всюду ниже предполагается, что ядро $k(x)$ удовлетворяет условию 3), а неоднородность $f(x)$ условию (см. условие 2.1 из [8]):

5) $f(x) \in \Gamma$ абсолютно непрерывна и не убывает на $[0,\infty)$.

Теорема 4. Класс Q_+ инвариантен относительно оператора T.

Доказательство. Пусть $u(x) \in Q_+$. Так как $k(x)$ эквивалентна неубывающей функции, то она локально интегрируема и локально ограничена. Значит (см., например, [7]), $(Tu)(x) \in C[0;\infty)$. Покажем, что $(Tu)(x) \ge L(x)$. Так как $k(0+) \le C_k \cdot k(x-t)$, $u(x) \ge L(x)$ и $f(x) \ge f(0)$, то

$$[(Tu)(x)]^\alpha \ge \frac{k(0+)}{C_k} \cdot \int_0^x \left[\frac{\alpha}{\alpha-1} \cdot \frac{k(0+)}{C_k} \cdot t + f^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(0) \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} dt + f(0) =$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha-1} \int_0^x \left[\frac{\alpha}{\alpha-1} \cdot \frac{k(0+)}{C_k} \cdot t + f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(0) \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} d\left[\frac{\alpha-1}{\alpha} \cdot \frac{k(0+)}{C_k} \cdot t + f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(0) \right] +$$

$+ f(0) \equiv [L(x)]^\alpha$, то есть $(Tu)(x) \ge L(x)$.

Докажем, что $(Tu)(x) \le R(x)$. Так как $u(x) \le R(x)$ и $R(x)$ неубывающая функция, то применяя неравенство (8) при $g(x) = R(x)$, имеем

$$[(Tu)(x)]^\alpha \le C_k \cdot \int_0^x k(t) \cdot R(t)dt + f(x) = \int_0^x R(t) \cdot \left(C_k \cdot k(t) + \frac{1}{R(t)} \cdot f'(t) \right) dt + f(0) \le$$

$$\le \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \cdot \int_0^x \left[\int_0^t C_k \cdot k(\tau)d\tau + \frac{\alpha}{\alpha-1} \cdot f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(t) \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} \times \left(C_k \cdot k(t) + f^{-\frac{1}{\alpha}}(t) \cdot f'(t) \right) dt + f(0) = [R(x)]^\alpha.$$

Таким образом, $(Tu)(x) \le R(x)$ $\forall x \ge 0$ - что и требовалось.

Используя теорему 4 и лемму 5 из [11], точно так же как и в [8], можно показать, что уравнение (7) имеет единственное решение в полном нелинейном метрическом пространстве $C_+ = \{u(x): u(x) \in C[0,b] \text{ и } u(x) > 0 \text{ при } x > 0\}$, с весовой метрикой специального вида, и что это решение может быть найдено методом последовательных приближений. Кроме того, так же как и в [8], можно доказать непрерывную зависимость решения уравнения (7) относительно изменений ядра $k(x)$ и неоднородности $f(x)$ в терминах одной и той же весовой метрики.

Литература

1. *Okrasinski W.* Nonlinear Volterra equations and physical applications // Extracta Math. 1989. V. 4, N2. P. 51-80.

2. *Askhabov S.N., Betilgiriev M.A.* Nonlinear convolution type equations // Seminar Analysis. Karl Weierstrass Inst. Math. Berlin, 1990. P. 1-30.

3. *Askhabov S.N.* Integral equations of convolution type with power nonlinearity // Colloq. Math. 1991. V. 62, N1. P. 49-65.
4. *Okrasinski W.* On a non-linear convolution equation occurring in the theory of water percolation // Ann. Pol. Math. 1980. V. 37, N3. P. 223-229.
5. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. М.:ГИТТЛ, 1957. – 552 с.
6. *Okrasinski W.* On subsolutions of a non-linear diffusion problem // Math. Meth. Appl. Sci. 1989. V. 11, N3. P. 409-416.
7. *Асхабов С.Н., Карапетянц Н.К., Якубов А.Я.* Интегральные уравнения типа свертки со степенной нелинейностью и их системы // Докл. АН СССР. – 1990. – Т. 311. – №5. – С. 1035-1039.
8. *Асхабов С.Н., Бетилгириев М.А.* Априорные оценки решений одного нелинейного интегрального уравнения типа свертки и их приложения // Матем. заметки. – 1993. – Т. 54. – Вып. 5. – С. 3-12.
9. *Красносельский М.А.* Положительные решения операторных уравнений. – М.: Физматгиз, 1962. – 396с.
10. *Цалюк З.Б.* Нелинейное уравнение Вольтерра с неубывающим ядром // Изв. вузов. Математика – 1995. – №8. – С. 74-77.
11. *Асхабов С.Н., Бетилгириев М.А.* Нелинейные интегральные уравнения типа свертки с почти возрастающими ядрами в конусах // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27. – №2. – С. 321-330.
12. *Садовничий В.А., Григорьян А.А., Конягин С.В.* Задачи студенческих математических олимпиад. М.:МГУ, 1987. – 310 с.
13. *Асхабов С.Н., Бетилгириев М.А.* Нелинейные интегральные уравнения типа свертки в конусах. Деп. в ВИНИТИ 14.02.92, №494-В92. - 24 с.
14. *Харди Г.Г., Литтльвуд Д.Е., Полиа Г.* Неравенства. М.:ИЛ, 1948. – 456 с.
15. *Yakubov A., Shankishvili L.* Some inequalities for convolution integral transforms // Integral transforms and special functions. 1994. V. 2, N1. P. 65-76.

A bounds of solutions of the Volterra integral equations with power nonlinearity and their applications

S.N. Askhabov

In connection with applications in the theories of filtration, shock waves and others nonlinear integral of Volterra type equations is considered in the cone of nonnegative continuous functions.

