2000 г. № 5
Труды ФОРА

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЛОКАЛЬНО НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

М. А Магомаева

Майкопский государственный технологический институт, г. Майкоп

В статье изучается краевая задача для локально нагруженного уравнения параболического типа с разрывными коэффициентами. К таким задачам сводятся задачи, связанные с процессом фильтрации грунтовых вод.

В ограниченной области $D = \{(x,y,t) : 0 < x < x_0, 0 < y < y_3, 0 < t < t_0\}$ рассматривается нагруженное уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \begin{cases} a_1(x,y,t)U_{yy} + a^+(x,y,t)U_y + b^+(x,y,t)U + f^+(x,y), \ y_2 < y < y_3, \\ a_2(x,y,t)U_{xx} + a^-(x,y,t)U_x + b^-(x,y,t)U + \\ +b_1(x,y,t)\lim_{y\uparrow y_2} U_y + b_2(x,y,t)\lim_{y\downarrow y_1} U_y, \ y_1 < y < y_2, \\ a_3(x,y,t)U_{yy} + a_+(x,y,t)U_y + b_+(x,y,t)U + f_+(x,y), \ 0 < y < y_1, \end{cases} \qquad (1)$$

где

$$U_y(x,y_1,t) = \lim_{y\uparrow y_1} U_y(x,y,t), \quad U_y(x,y_2,t) = \lim_{y\downarrow y_2} U_y(x,y,t).$$

Пусть $S_1 = D \cap \{(x,y,t) : y = y_1\}, S_2 = D \cap \{(x,y,t) : y = y_2\}$, $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < x_0, 0 < t < t_0\}$. Поверхности S_1 и S_2 разделяют область D на три части D^+, D^- и D_+, где $y_2 < y < y_3$, $y_1 < y < y_2$, $0 < y < y_1$ соответственно. Предполагается, что функции $b_1(x,y,t)$ и $b_2(x,y,t)$ непрерывны в D^+ и D_+ соответственно, локально непрерывны по Гельдеру по x в интервале $0 < x < x_0$ равномерно по отношению к y и t.

Под регулярным в области D решением уравнения (1) будем понимать функцию $u = u(x,y,t)$ со следующими свойствами:

1) u непрерывна в D^+, D^- и D_+;

2) функции $u^-(x,y_1,t) = \lim_{y\uparrow y_1} u(x,y,t)$ и $u^-(x,y_2,t) = \lim_{y\downarrow y_2} u(x,y,t)$ имеют по переменной t дробные производные порядка $1/2$ с началом в точке $t = 0$;

3) функции $u_y(x,y_1,t)$ и $u_y(x,y_2,t)$ непрерывны в Ω, локально непрерывны по Гельдеру по x в интервале $0 < x < x_0$ равномерно по t;

4) функция u в областях D^+ и D_+ имеет непрерывные производные u_t, u_y, u_{yy} , а в области D^- непрерывные производные u_t, u_x, u_{xx};

5) функция u в $D|S_1$ и $D|S_2$ удовлетворяет уравнению (1).

Задача А. Определить регулярное в области D решение $u(x,y,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{aligned} u(x,y,0) = \tau(x,y), (x,y) \in [0,x_0] \times [0,y_3], \\ u(0,y,t) = \varphi_0(y,t), u(x_0,y,t) = \varphi_1(y,t), (y,t) \in [y_1,y_2] \times [0,t_0], \\ u(x,y_3,t) = \psi_0(x,t), u(x,0,t) = \psi_1(x,t), (x,t) \in [0,x_0] \times [0,t_0] \end{aligned}$$

и условиям сопряжения

$$\begin{aligned} u^+(x,y_2,t) = \alpha(x,t)u^-(x,y_2,t) + \beta(x,t)D_{ot}^{1/2}u^-(x,y_2,t) + \gamma(x,t), \\ u_+(x,y_1,t) = \alpha_1(x,t)u^-(x,y_1,t) + \beta_1(x,t)D_{ot}^{1/2}u^-(x,y_1,t) + \gamma_1(x,t), \end{aligned}$$

где $D_{ot}^{1/2}$ - оператор дробного (в смысле Римана-Лиувилля) дифференцирования порядка $1/2$.

Предполагается, что:

заданные функции $b_1(x,y,t)$ и $b_2(x,y,t)$ непрерывны в D^-, локально непрерывны по Гельдеру по x в интервале $0 < x < x_0$ равномерно относительно y,t;

$\tau, \varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \beta, \gamma, \alpha_1, \alpha, \beta_1, \gamma_1$ - заданные непрерывные функции в $\overline{\Omega}$, кроме того, $\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1$ удовлетворяют условию Гелдера по t в $[0, t_0]$, α, β, γ, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \in C^1(\overline{\Omega})$.

При малых β и β_1 слагаемые $\beta(x,t)D_{ot}^{1/2}u^-(x,y_2,t)$, $\beta_1(x,t)D_{ot}^{1/2}u^-(x,y_1,t)$ в условиях сопряжения выступают как регуляризаторы задачи А.

Если все коэффициенты уравнения (1) непрерывны в $\overline{D}$ по совокупности переменных x,y,t и удовлетворяют условию Гельдера по x, кроме того коэффициенты $a_i(x,y,t), i = 1,2,3$, в Ω удовлетворяют условию Гельдера по t, то справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть существует регулярное решение задачи А. Тогда, если $\beta(x,t) \neq 0$, $\beta_1(x,t) \neq 0, \forall (x,t) \in [0,x_0] \times [0,t_0]$, то функции $\nu_1(x,t) = u_y(x,y_2,t)$, $\nu_2(x,t) = u_y(x,y_1,t)$ являются решениями системы интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода

$$\begin{aligned}
\beta(x,t)\nu_1(x,t) + \int_0^t \int_0^{x_0} b_1(\xi, y_2, \eta)\nu_1(\xi,\eta)G^+(x,t,\xi,\eta)d\xi d\eta + \\
+ \int_0^t \nu_1(x,\eta)K(x,\eta)d\eta = F^+(x,t), \\
\beta_1(x,t)\nu_2(x,t) + \int_0^t \int_0^{x_0} b_2(\xi, y_1, \eta)\nu_2(\xi,\eta)G^+(x,t,\xi,\eta)d\xi d\eta + \\
+ \int_0^t \nu_2(x,\eta)K(x,\eta)d\eta = F_+(x,t),
\end{aligned} \tag{2}$$

где $G^+(x,t,\xi,\eta)$ -функция Грина смешанной краевой задачи для уравнения теплопроводности. Ядро $K(x,\eta)$ имеет слабую диагональную особенность. Из (2) следует однозначная разрешимость задачи А.

Пользуясь принципом сжатых отображений можно построить алгоритм численной реализации задачи А.

Литература

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных проиизводных. - М.: Наука, 1981.

2. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. - М.: Мир, 1966.

3. Нахушев А.М. К теории дробного исчисления//Дифференциальные уравнения, 1988, т.24, N 24.

4. Нахушев А.М. Уравнения Математической биологии. - М.: Высшая школа, 1995.

5. Нахушев А.М. О нелокальных задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями// Дифференциальные уравнения, 1985, т.21, N 1.

On the one boundary value problem for locally loading parabolic type equation

M. A. Magomaeva

The parabolic type equation with discontinuous coefficients is studied.

