ОБ ОДНОМ ТОЧНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА ДЛЯ ВАКУУМА

О.М. Мозгунов, Н.А. Швецова, Л.А. Шекоян

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп
Кубанский государственный университет, г. Краснодар

Проводится исследование системы нелинейных уравнений Эйнштейна для вакуума. Доказано, что для выбранной метрики вне тяготеющих масс решение уравнений отсутствует.

1. Введение

Нахождение точных решений нелинейных уравнений Эйнштейна имеет большое значение в при построении космологических моделей и моделировании астрофизических объектов (белые карлики, нейтронные звезды, черные дыры).

На сегодняшний день известно достаточно большое количество точных решений уравнений тяготения Эйнштейна [1]. Рассматривают космологические решения и решения для точечных масс (астрофизические объекты). Наиболее важными являются стационарные решения де Ситтера, Шварцшильда, Керра, Геделя и нестационарные модели Фридмана, Бонди-Толмена.

В настоящей работе исследуется метрика вида

$$ds^2 = M^2(dx^0)^2 + 2H^2 dx^0 dx^3 - e^F[(dx^1)^2 + Sin^2(x^1)((dx^2)^2 + Sin^2(x^2)(dx^3)^2)],$$

где $M = M(x^0, x^1, x^2)$, $H = H(x^0, x^1, x^2)$, $F = F(x^0)$, а координаты определены следующим образом: $0 \le x^1 \le \pi$, $0 \le x^2 \le \pi$, $0 \le x^3 \le 2\pi$.

Известно, что система уравнений Эйнштейна представляет собой систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. В данной работе решение получено без привлечения специальных формализмов. Поэтому настоящее решение представляет интерес не только для космологов, но и для специалистов-математиков.

2. Обозначения и соглашения

Будем использовать обозначения и соглашения, принятые в [2], а именно:
уравнения тяготения Эйнштейна выбираем в следующей форме:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \kappa T_{ik}, \tag{2,1}$$

где κ - постоянная Эйнштейна; уравнения (2,1) удобно переписать в виде:

$$R_{ik} = \kappa\left(T_{ik} - \frac{1}{2} T g_{ik}\right), \tag{2,2}$$

компоненты тензора Риччи R_{ik} и символы Кристоффеля Γ^i_{kl} вычисляем по формулам:

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km},$$

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right).$$

3. Решение уравнений

Учитывая, что рассматривается вакуумное решение, уравнения (2,2) можно представить в следующем виде:

$$R_{ik} = 0 . \tag{3,1}$$

Уравнения тяготения, содержащие R_{13}, R_{23} могут быть переписаны в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\left\{He^F\left(\frac{X}{\Phi}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{H}{X^{\frac{1}{2}}}\right)\right\} = 0 , \tag{3,2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\left\{He^F\left(\frac{X}{\Phi}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{H}{X^{\frac{1}{2}}}\right)\right\} = 0 , \tag{3,3}$$

а уравнения, содержащие R_{01}, R_{02}:

$$\left(\frac{\Phi}{X}\right)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x^1}\left\{\left(\frac{X}{\Phi}\right)^{1/2}\frac{\partial F}{\partial x^0}\right\} + \frac{H^2}{e^F\Phi^{1/2}}\frac{\partial}{\partial x^0}\left\{He^F\left(\frac{X}{\Phi}\right)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{H}{X^{1/2}}\right)\right\} = 0 , \tag{3,4}$$

$$\left(\frac{\Phi}{X}\right)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x^2}\left\{\left(\frac{X}{\Phi}\right)^{1/2}\frac{\partial F}{\partial x^0}\right\} + \frac{H^2}{e^F\Phi^{1/2}}\frac{\partial}{\partial x^0}\left\{He^F\left(\frac{X}{\Phi}\right)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{H}{X^{1/2}}\right)\right\} = 0 , \tag{3,5}$$

Из уравнений (3,2)-(3,3) следует, что

$$He^F\left(\frac{X}{\Phi}\right)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{H}{X^{1/2}}\right) = f(x^1, x^2) , \tag{3,6}$$

$$He^F\left(\frac{X}{\Phi}\right)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{H}{X^{1/2}}\right) = g(x^1, x^2), \tag{3,7}$$

С учётом (3,2)-(3,3) уравнения (3,4)-(3,5) упрощаются, и выражения под производными по пространственным координатам зависят только от x^0, т.е.

$$\left(\frac{X}{\Phi}\right)^{1/2}\frac{\partial F}{\partial x^0} = T(x^0) . \tag{3,8}$$

Выражения (3,6)-(3,7) удобно переписать с учётом (3,8) в виде:

$$f(x^1, x^2) = He^F\frac{T(x^0)}{(\ln X)'}\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{H}{X^{1/2}}\right), \tag{3,6a}$$

$$g(x^1, x^2) = He^F\frac{T(x^0)}{(\ln X)'}\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{H}{X^{1/2}}\right), \tag{3,7a}$$

где штрих означает дифференцирование по координате x^0.
Из (3,8) легко получить уравнение:

$$\left(\frac{M/X^{1/2}}{F'/TX^{1/2}}\right)^2+\left(\frac{H^2/X}{F'/TX^{1/2}}\right)^2=1,$$

откуда с необходимостью следует, что

$$\frac{M}{X^{1/2}}=\frac{F'}{TX^{1/2}}Sin(p)\ , \tag{3,9}$$

$$\frac{H^2}{X}=\frac{F'}{TX^{1/2}}Cos(p)\ , \tag{3,10}$$

где $p=p(x^0,x^1,x^2)$.

Группа соотношений, получаемых из (3,1) позволяет проявить частичную зависимость функций М и Н от координат x^1,x^2.

Действительно, разность $\frac{R_{33}}{g_{33}}-\frac{R_{03}}{g_{03}}=0$ с учётом (3,6а)-(3,7а) и (3,9)-(3,10) может быть представлена в виде:

$$Sin^2(x^2)\frac{\partial}{\partial x^1}\left[Sin^4(x^1)\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{Sin(p)}{Sin(x^1)}\right)\right]+Sin(x^1)\frac{\partial}{\partial x^2}\left[Sin^3(x^2)\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{Sin(p)}{Sin(x^2)}\right)\right]=0,$$

а разность $\frac{R_{00}}{g_{00}}-\frac{R_{33}}{g_{33}}=0$ с учётом последнего соотношения как

$$1-Cos(2x^1)-\frac{TT'e^F}{F'}Sin^2(x^1)-\left\{Sin^4(x^1)\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{Cos(p)}{Sin(x^1)}\right)\right]^2+Sin^2(x^2)\left[\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{Cos(p)}{Sin(x^2)}\right)\right]^2\right\}=0. \tag{3,11}$$

Система уравнений $\frac{R_{11}}{g_{11}}-\frac{R_{33}}{g_{33}}=0$, $\frac{R_{22}}{g_{22}}-\frac{R_{33}}{g_{33}}=0$, переписанная соответственно как

$$Sin^2(x^1)\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{Cos(p)}{Sin(x^1)}\right)\right]^2+\frac{1}{2}\frac{Sin^2(x^2)}{Sin^2(x^1)}\left[\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{Cos(p)}{Sin(x^2)}\right)\right]^2=0,$$

$$\frac{Sin^2(x^2)}{Sin^2(x^1)}\left[\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{Cos(p)}{Sin(x^2)}\right)\right]^2+\frac{1}{2}Sin^2(x^1)\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{Cos(p)}{Sin(x^1)}\right)\right]^2=0,$$

позволяет определить функцию р следующим образом

$$Cos(p)=k\cdot Sin(x^1)Sin(x^2), \tag{3,12}$$

где $k = k(x^0)$, $|k| \leq 1$.

Подставляя (3,12) в (3,11) получим после несложных преобразований полезное соотношение:

$$\frac{TT'}{F'} e^F = 2. \tag{3,13}$$

Оставшиеся уравнения, содержащие R_{ik}, $i = k$, $i = 0,1,2,3$ и R_{03} с учётом (3,12) приводятся к виду:

$$2e^{-F} + \frac{3}{4}T^2 + \frac{1}{2}\frac{TT'}{F'} = 0, \tag{3,14}$$

Подстановка (3,13) в (3,14) показывает, что система уравнения тяготения вне тяготеющих масс не имеет решения для выбранной метрики.

4. Заключение

В работе исследована метрика, имеющая более общую форму по отношению к уже известным [1]. В ходе исследования системы уравнений тяготения Эйнштейна вне тяготеющих масс удалось показать, что для данной метрики решение отсутствует.

Литература

1. Точные решения уравнений Эйнштейна/ Под ред. Э. Шмутцера. - М.: Энергоиздат, 1982. - 416 с.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. - М.: Наука, 1988. - 512 с.

About one exact solution of the equations of Einstein for vacuum

O.M. Mozgunov, N.A. Shwecova, L.A. Shekoyan

Carries out research of system of the nonlinear equations of Einstein for vacuum. It is proved, that for the chosen metrics outside of gravitating weights the decision of the equations is absent.

